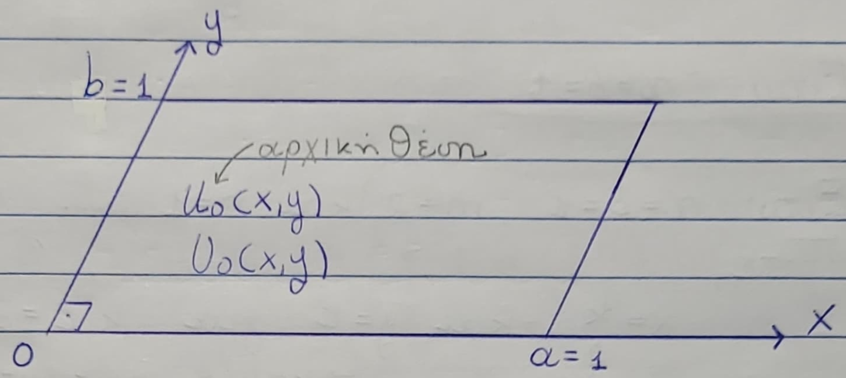
29/03/23

Παράδειγμα:

Έστω ομαλή επιφάνεια (ελαστική), με αρχική θέση και ταχύτητα.



$$u_0(x,y)=f(x,y)=x(1-x)y(1-y)$$
$$v_0(x,y)=0$$

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}\,,\quad x,y\in(0,1)$$

Σ.Σ=0 ← $u|_{\partial R}=0 \quad \forall\, t>0$

$$u(x,y,0)=u_0(x,y)$$
$$u_t(x,y,0)=0$$

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_0(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy\,dx$$

$$A_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 x(1-x)y(1-y)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\,dy\,dx$$

$$=4\int_0^1 x(1-x)\sin(m\pi x)\,dx\cdot\int_0^1 y(1-y)\sin(n\pi y)\,dy.$$

παρ-όμοια ολ''ματα

→ άρα αρκεί να βρώ το ένα εκ των δύο.

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x)\sin(m\pi x)\,dx = -\frac{1}{m\pi}\int_0^1 x(1-x)\big(\cos(m\pi x)\big)'\,dx$$

$$= \frac{1}{m\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos(m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(m\pi)^2}(1-2x)\cancelto{0}{\sin(m\pi x)}\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{(m\pi)^2}\int_0^1 -2\sin(m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{2}{(m\pi)^3}\cos(m\pi x)\Big|_0^1 = \begin{cases} 0, & m \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{4}{(m\pi)^3}, & m \text{ περ.} \end{cases}$$

$$A_{mn} = 4\cdot\begin{cases} 0, & m \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{4}{(m\pi)^3}, & m \text{ περιττός} \end{cases} \cdot \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{4}{(n\pi)^3}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ ή } m \text{ άρτιος} \\ \dfrac{64}{m^3\pi^6 n^3}, & m,n \text{ περιττός} \end{cases}$$

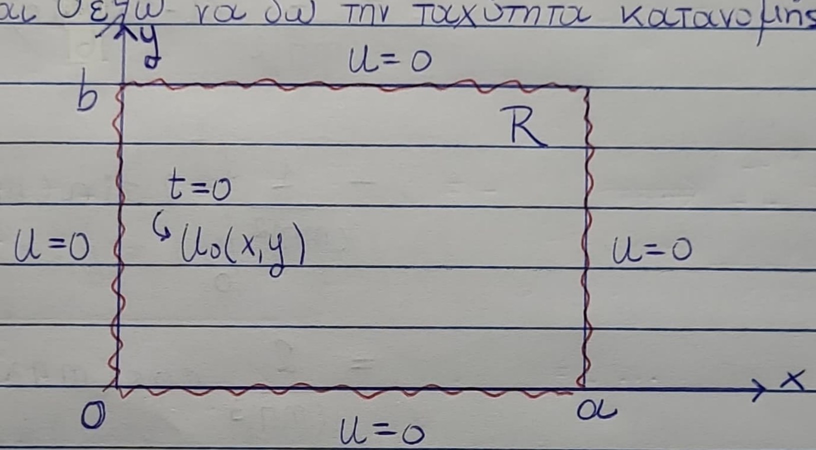
Οπότε η λύση θα δωθεί ως:

$$u(x,y,t) = \sum_{k_m=0}^{\infty}\sum_{k_n=0}^{\infty} \underset{\displaystyle\frac{64}{(2k_m+1)^3(2k_n+1)^3\pi^6}}{\underset{\|}{A_{2k_m+1,2k_n+1}}} \cdot \sin((2k_m+1)\pi x)\cdot\sin((2k_n+1)\pi y)\cdot\sin\left(\sqrt{(2k_m+1)^2+(2k_n+1)^2}\,\pi t\right)$$

Εξίσωση Θερμότητας: (σε 2-διαστάσεις)

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

Δηλαδή έστω ότι έχουμε μία πλάκα που είναι μονωμένη στα άκρα της. Σε χρόνο $t=0$ η πλάκα έχει αρχική θερμοκρασία. Επίσης εδώ δεν έχω αρχική ταχύτητα (ρεαλιστικό μοντέλο). Έπειτα προσθέτω πάγο γύρω-γύρω. Και θέλω να δω την ταχύτητα κατανομής της "λύσης".



$$u|_{\partial R} = 0, \quad \forall t > 0$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad x,y \in R$$

$$u = XYT$$

Έτσι ακολουθώντας τις προηγούμενες διαδικασίες και βήματα, παίρνω τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Οπότε η λύση μου εδώ θα έχει τη μορφή:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

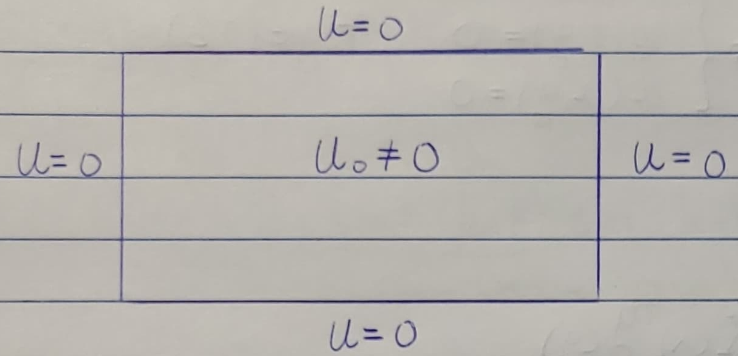
όπου, $\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_n^2$ με $\mu_m = \frac{m\pi}{\alpha}$, $\nu_n = \frac{n\pi}{b}$

και,

$$A_{mn} = \frac{4}{\alpha b} \int_0^b \int_0^\alpha u_0(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx\, dy$$

Οριακή Κατάσταση: $(t \to \infty)$

$$u_t = c^2 \boxed{u_{xx} \approx 0}$$



$$u_t = c^2(u_{xx}+u_{yy}) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

• Εξίσωση Laplace (2D):

$$\Rightarrow \nabla^2 u = 0$$

Τώρα θα αλλάξω το πείραμα και δεν θα έχω πάγο γύρω-γύρω από την πλάκα. Θα προσθέσω διάφορες και διαφορετικές πηγές (συναρτήσεις) για την απόσβεση της θερμοκρασίας της πλάκας.

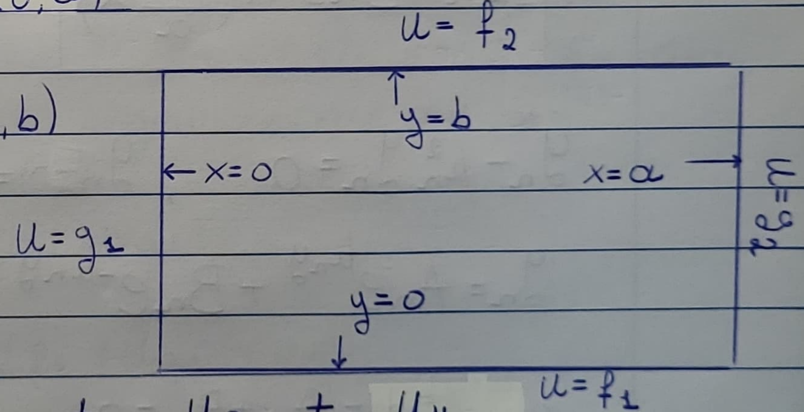
$u_{xx}+u_{yy}=0$, $x\in(0,a)$, $y\in(0,b)$

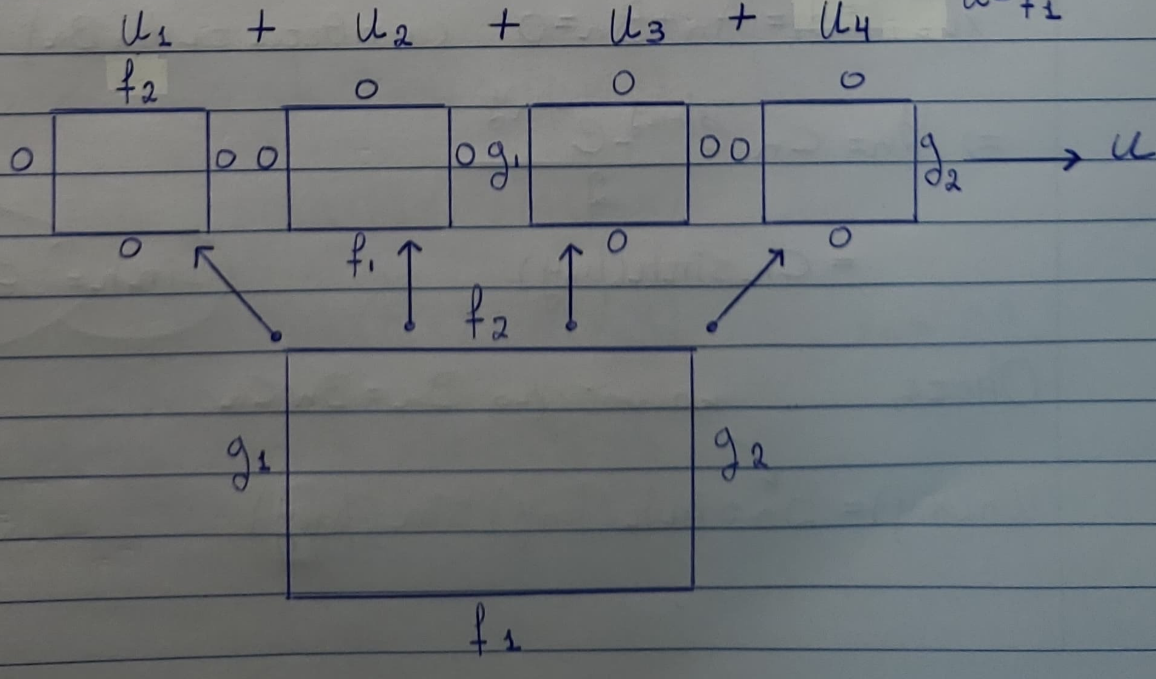
$u(x,0)=f_1(x)$, $\forall\ x\in(0,a)$

$u(x,b)=f_2(x)$

$u(0,y)=g_1(y)$, $\forall\ y\in(0,b)$

$u(a,y)=g_2(y)$





Οπότε έχω ότι $u(x,0)=0$, $\forall x\in(0,\alpha)$
$u(x,b)=f_2(x)$

$u(0,y)=X(0)Y(y)=0 \Longleftarrow \begin{cases} u(0,y)=0 \\ u(\alpha,y)=0 \end{cases}$, $\forall y\in(0,b)$

Άρα,

$$u=XY$$
$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

θέλω το x να έχει περιοδικότητα.

$$\Rightarrow X''Y=-XY''$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\text{σταθερά}=-\mu^2 \Longrightarrow \boxed{X''+\mu^2X=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right)}, \text{ για } n=1,\dots$$

$$Y_n''-\mu_n^2Y_n=0, \quad Y_n(0)=0, \quad n=1,\dots$$

$$Y_n=A_ne^{\mu_ny}+B_ne^{-\mu_ny}$$

για $Y(0)=A_n+B_n=0$ (αντίθετα τα A_n, B_n)

$$\Rightarrow Y_n=C_n\frac{e^{\mu_ny}-e^{-\mu_ny}}{2}$$
$$=C_n\sinh(\mu_ny)$$

$\sinh=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Οπότε, καινούργιο $B_n=B_n\cdot C_n$

$$u_n(x,y)=B_n\sinh(\mu_ny)\sin(\mu_nx)$$

Άρα,

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\nearrow B_n \cdot C_n = B_n}{B_n} \sinh(\mu_n y)\sin(\mu_n x)$$

$$u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\overset{B_n\cdot C_n = B_n}{B_n}\sinh(\mu_n b)}_{:=C_n \text{ (καινούργιο)}} \sin(\mu_n x) = f_2(x)$$

$$C_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_2(x)\sin(\mu_n x)dx$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{2}{\alpha\sinh(\mu_n b)}\int_0^{\alpha} f_2(x)\sin(\mu_n x)dx$$

Αυτή είναι μια από τις 4 λύσεις. Οι υπόλοιπες είναι συμμετρικές με αυτήν. Αυτή μπορώ να την πω $B_n^{(f_2)}$.

•Έτσι η γενική λύση θα είναι:

$$u(x,y)=u_{f_2}+u_{f_1}+u_{g_1}+u_{g_2}$$

$$u_{f_2}=\sum B_n^{(f_2)}\sinh(\mu_n y)\sin(\mu_n x)$$

$$u_{f_1}=\sum B_n^{(f_1)}\cdot\sinh(\mu_n y)\cdot\sin(\mu_n x)$$

$$u_{g_2}=\sum B_n^{(g_2)}\cdot\sinh(v_n x)\cdot\sin(v_n y) \quad , \quad v_n=\frac{n\pi}{b}$$

$$u_{g_1}=\sum B_n^{(g_1)}\sinh(v_n x)\sin(v_n y)$$