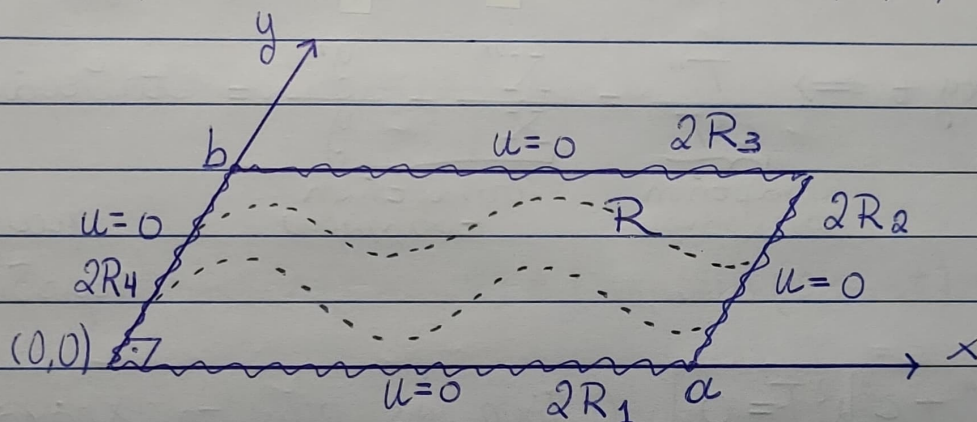


27/03/23

Κυματική εξίσωση: (συναρτήσεις 2-διαστάσεων)

Έστω παραγόμενη, ελαστική και λεπτή μεμβράνη.



Εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

$$t > 0, x \in (0, a), y \in (0, b)$$

$$\underline{\Sigma. \Sigma} : 2R_1: u(x, 0, t) = 0 \quad \forall y \in (0, a)$$

$$2R_2: u(a, y, t) = 0 \quad \forall y \in (0, b)$$

$$2R_3: u(x, b, t) = 0 \quad \forall x \in (0, a)$$

$$2R_4: u(0, y, t) = 0 \quad \forall y \in (0, b)$$

$$\forall t > 0$$

Α.Σ

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in R$$

$$u_t(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (x, y) \in R$$

• Το u εκφράζει την μετατόπιση ως προς τον τρίτο άξονα.

• σε μια διάσταση:

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$$

$$\text{όπου } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

(x, y, t) ελεύθερες μεταβλητές

Την εξίσωση θα τη λύσουμε με τη μέθοδο χωρισμένων μεταβλητών:

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t) \leftarrow \text{γάρχω λύσεις αυτής της μορφής}$$

$$\Rightarrow u_{tt} = X Y T'', \quad u_{xx} = X'' Y T, \quad u_{yy} = X Y'' T$$

$$\Rightarrow X Y T'' = c^2 (X'' Y T + X Y'' T)$$

X.β.γ.

$$\Rightarrow \frac{X Y T''}{c^2 X Y T} = \frac{X'' Y T}{X Y T} + \frac{X Y'' T}{X Y T}$$

χρονική εξάρτηση

χωρική εξάρτηση

$$\forall x, y, t \Rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \text{σταθερά} = -\kappa^2, (\kappa > 0)$$

συνάρτηση του χρόνου

συνάρτηση του χώρου

↓
για να έχω περιοδικές λύσεις

$$\boxed{T'' + c^2 \kappa^2 T = 0} \quad (\text{λύση ως προς το χρόνο})$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} - \kappa^2 = \text{σταθερά} = -\mu^2$$

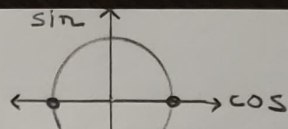
↗ σταθερά

συνάρτηση του x συνάρτηση του y

$$\underline{\underline{\Sigma. \Sigma:}} X(0) = X(a) = 0 \leftarrow X'' + \mu^2 X = 0$$

$$\underline{\underline{\Sigma. \Sigma:}} Y(0) = Y(b) = 0 \leftarrow Y'' + \nu^2 Y = 0, \text{ όπου } \nu^2 = \kappa^2 - \mu^2 \Rightarrow \boxed{\kappa^2 = \mu^2 + \nu^2}, \kappa > \mu, \nu$$

$$\underline{\underline{2R_1:}} X(x) Y(0) T(t) = 0 \quad \forall x, t \Rightarrow Y(0) = 0$$



$$X(0) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x) \implies A = 0$$

$$\Rightarrow X_m(x) = B_m \sin(\mu_m x) \Big|_{x=\alpha} = 0 \Rightarrow \mu_m = \frac{n\pi}{\alpha}, \text{ για } n=1, 2, \dots$$

(δείτε sin περιττή συνάρτηση)

$$X_m(x) = B_m \sin\left(\frac{n\pi x}{\alpha}\right) \text{ για } n=1, 2, \dots$$

$$Y_n(y) = B'_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), n=1, 2, \dots$$

- Έχω το $u = X Y T$ και
 Ορίζω $u_{mn} = X_m Y_n T_{mn}$

$$k_{mn}^2 = \mu_m^2 + \nu_n^2$$

$$\Rightarrow T_{mn}'' - c^2 k_{mn}^2 T_{mn} = 0$$

$$\Rightarrow T_{mn} = A_{mn} \cos(c k_{mn} t) + B_{mn} \sin(c k_{mn} t)$$

Η γενική λύση θα έχει τη μορφή:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t)$$

$$\Rightarrow u_{mn}(x, y, t) = [A_{mn} \cos(c k_{mn} t) + B_{mn} \sin(c k_{mn} t)] \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$u(x, y, 0) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = u_0(x, y)$$

Όπου $A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{\alpha}\right)$ ο συντελεστής Fourier για τη σειρά με το $\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]}_{:= C_n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = U_0(x, y)$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) U_0(x, y) dy$$

συνάρτηση του x

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \underbrace{\frac{2}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) U_0(x, y) dy}_{:= g(x)}$$

$$\Rightarrow A_{mn} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b U_0(x, y) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx$$

$$U_t(x, y, 0) = \sum_{m, n=1}^{\infty} C_{kmn} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = U_0(x, y)$$

$$\Rightarrow B_{mn} = \frac{4}{ab C_{kmn}} \int_0^a \int_0^b U_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx$$

$$U = \sum_m \sum_n U_{mn} \quad \mu \varepsilon \quad U_{mn} = T_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$T \propto \sin(k_{kmn} t)$
 ανάλογα

$$\text{Θέλω } u_{mn} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$

$$\bullet \frac{m\pi x}{a} = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi a}{km \pi}, \quad k=1, 2, \dots$$

$$\bullet \frac{n\pi y}{b} = \ell\pi \Rightarrow y = \frac{\ell b}{n}, \quad \ell=1, 2, \dots$$

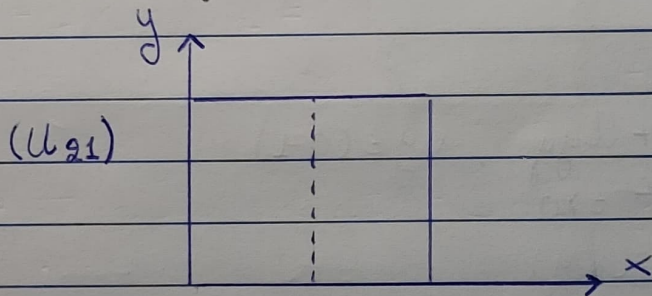
Παράδειγμα:

Έστω $a=b=1$, $m=2$ και $n=1$

Τότε,

$$x = \frac{k}{2} \quad \text{και} \quad y = \ell \quad \text{για} \quad k, \ell = 1, 2, \dots$$

↳ $k=1$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=1$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=2$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=3$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=4$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=5$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=6$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=7$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=8$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=9$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=10$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=11$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=12$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=13$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=14$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=15$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=16$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=17$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=18$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=19$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=20$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=21$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=22$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=23$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=24$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=25$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=26$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=27$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=28$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=29$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=30$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=31$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=32$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=33$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=34$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=35$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=36$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=37$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=38$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=39$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=40$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=41$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=42$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=43$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=44$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=45$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=46$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=47$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=48$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=49$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=50$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=51$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=52$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=53$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=54$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=55$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=56$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=57$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=58$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=59$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=60$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=61$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=62$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=63$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=64$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=65$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=66$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=67$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=68$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=69$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=70$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=71$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=72$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=73$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=74$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=75$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=76$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=77$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=78$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=79$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=80$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=81$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=82$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=83$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=84$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=85$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=86$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=87$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=88$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=89$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=90$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=91$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=92$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=93$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=94$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=95$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=96$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=97$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=98$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=99$ έχω γραμμή
 ↳ $\ell=100$ έχω γραμμή
 Δεν σχηματίζεται για $\ell=1$



Αν έχω m τότε $m-1$ ευθείες θα έχω μέσα.

