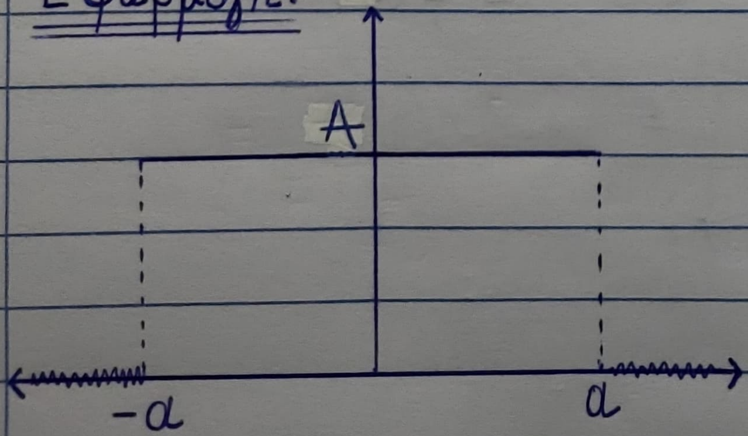
26/04/23

$$F(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Εφαρμογή:



$$f(x)=\begin{cases} A, & x\in[-\alpha,\alpha] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = A\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)$$

όπου $\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)=\begin{cases} 1, & x\in[-\alpha,\alpha] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-i\omega x}dx$$

$$(\omega\neq 0)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-i\omega}\right)\left[e^{-i\omega x}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-i\omega)}\left(e^{-i\omega\alpha}-e^{i\omega\alpha}\right)$$

$$=\frac{2A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega}\frac{e^{i\omega\alpha}-e^{-i\omega\alpha}}{2i}$$

$$=A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega}, \quad \omega\neq 0$$

Οπότε,

$$\hat{f}(0) = \lim_{\omega \to 0} \hat{f}(\omega) \qquad (\hat{f} \text{ συνεχής})$$

διότι εγώ ήθελα να το φέρω στη μορφή:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Δηλαδή, $\omega' = \alpha\omega$

$$\lim_{\omega' \to 0} A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha \frac{\sin(\omega')}{\omega'}$$

$$= \lim_{\alpha\omega \to 0} A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha \frac{\sin(\omega\alpha)}{\alpha\omega}$$

$$= \alpha A \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Τι θα γινόταν αν είχα:

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} A, & \omega \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = A \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(\omega)$$

όπου,

$$\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα,

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\omega x}\, d\omega$$

$$(x\neq 0) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{ix}\right)\left[e^{i\omega x}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{2A}{x\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(ax)}{x}$$

ουσία! $\left(PDE \xrightarrow{F} ODE \longrightarrow \hat{u}(\omega,t) \xrightarrow{F^{-1}} u(x,t) \right)$

1D **Εξίσωση Θερμότητας:**

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad , x\in\mathbb{R} \quad , t>0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad , x\in\mathbb{R}$$

$u_0(x) \longrightarrow \hat{u}_0(\omega)$

• Έτσι θα πάρω ως λύση την $1^{η}$ αναπαράσταση:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}\cdot e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi$$

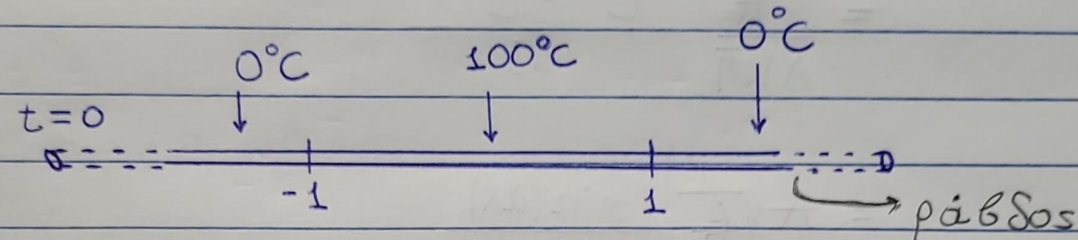
$2^{η}$ αναπαράσταση:

$$u(x,t) = \frac{1}{c\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}} * u_0(t)$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2 t}}\, d\xi.$$

Παράδειγμα:

Έστω μια ράβδος απείρου μήκους. Θέλουμε να δούμε τη θερμοκρασία της σε κάθε σημείο για οποιοδήποτε χρόνο. ($u(x,t)=;$).



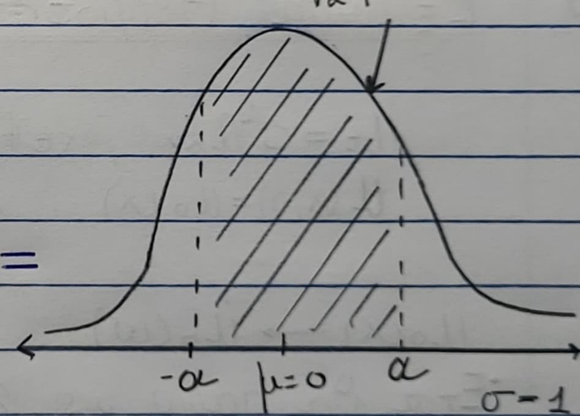
$$u_t = u_{xx} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 100 & , x \in [-1,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Οπότε,

$$u(x,t) = \frac{100}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi =$$



που θυμίζει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής

αλλαγή μεταβλητής:

$$z = \frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}$$

$$dz = -\frac{d\xi}{2\sqrt{t}}$$

$$d\xi = -2\sqrt{t}\, dz$$

$$= -\cancel{2\sqrt{t}}\,\frac{100}{\cancel{2}\sqrt{\pi}\,\cancel{\sqrt{t}}}\int_{\frac{x+1}{2\sqrt{t}}=z_2}^{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}=z_1} e^{-z^2}\,dz$$

$$= -\frac{100}{\sqrt{\pi}}\int_{z_2}^{z_1} e^{-z^2}\,dz$$

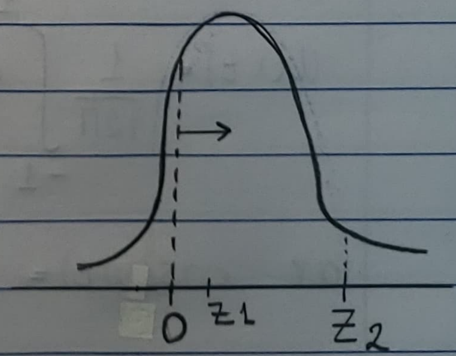
$$= \frac{100}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\,dz \quad (**)$$

Θα ορίσουμε τώρα τη συνάρτηση σφάλματος:

Συνάρτηση Σφάλματος: (Error Function)

$$\mathrm{erf}(x) = \boxed{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-z^2}\,dz} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-z^2}\,dz \in [0,1]$$

$$(**) = \frac{100}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{z_2} e^{-z^2}\,dz - \int_{0}^{z_1} e^{-z^2}\,dz\right]$$



$$= 50\left(\mathrm{erf}(z_2) - \mathrm{erf}(z_1)\right).$$

Παράδειγμα: (Κυματική)

$$u_{tt} = u_{xx} \quad , x \in \mathbb{R}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad , u_t(x,0) = U_0(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{u}_0(\omega) \cos(c\omega t) + \frac{1}{c\omega} \hat{U}_0(\omega) \sin(c\omega t) \right] e^{i\omega x} d\omega$$

Για $u_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x)}{x}$, $U_0(x) = 0$

$$u_0(x) \xrightarrow{\text{Fourier}} \hat{u}_0(\omega) \qquad U_0(x) \xrightarrow{\text{Fourier}} \hat{U}_0(\omega) = 0$$

$$\hat{u}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & , x \in [-1,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οπότε η λύση θα είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos(\omega t) e^{i\omega x} d\omega$$

αν $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

Τότε,
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-1}^{1} e^{i\omega(x+t)} + e^{i\omega(x-t)} d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i(x+t)} \left(e^{i(x+t)} - e^{-i(x+t)} \right) + \frac{1}{i(x-t)} \left(e^{i(x-t)} - e^{-i(x-t)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(x+t)}{x+t} + \frac{\sin(x-t)}{x-t} \right]$$