24/04/23

Μετασχηματισμός Fourier:

$f(x) \to \hat{f}(\omega)$

$$F[f(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \hat{f}(\omega)$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier:

$\hat{f}(\omega) \to f(x)$

$$F^{-1}[\hat{f}(\omega)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = f(x)$$

Ιδιότητες:

i) • $F(af+bg) = aF[f] + bF[g]$

$$= a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$$

• $$F[f'(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = -i\omega F[f(x)](\omega)$$

Εν γένει,

ii) $F[f^{(n)}(x)](\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$

Ορισμός: (Συνέλιξη)

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \qquad (**)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, f(x-\xi)\, d\xi$$

$\xi^* = x - \xi$

$d\xi^* = -d\xi$

$$(**) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty} f(x-\xi^*)\, g(\xi^*)\, d\xi^*$$

$$= (g*f)(x)$$

iii) $F[f*g](\omega)=\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$

iv) $$F[xf(x)](\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=i\frac{d}{d\omega}F[f]$$

$$=i\hat{f}'(\omega)$$

→ Οι ισότητες που εμφανίζουν την παράγωγο είναι οι εξής:

- $F[f^{(n)}(x)]=(-i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
- $F[xf(x)]=i\dfrac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)=i\hat{f}'(\omega)$

Κυματική Εξίσωση:

Άπειρη χορδή

$$u_{tt}=c^2u_{xx}\,,\quad x\in\mathbb{R},\ t>0 \qquad u=u(x,t)$$
$$u(x,0)=u_0(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,0)=U_0(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier θα γίνεται ως προς την μεταβλητή x, διότι οι Α.Σ είναι συναρτήσει ως προς τη μεταβλητή x.

Αν πάρω τώρα,

$$F[u_{tt}(x,t)](\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x,t) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx \right)$$

$$= \hat{u}_{tt}(\omega,t).$$

$$F[u_{xx}](\omega,t) = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega,t)$$

$$= \omega^2 \hat{u}(\omega,t)$$

Οπότε η εξίσωση μου στο μετασχηματισμένο πρόβλημα έχει πάρει τώρα τη μορφή:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + c^2 \omega^2 \hat{u} = 0 \\ \text{Α.Σ:}\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{u}_0(\omega) \\ \quad\ \ \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{U}_0(\omega) \end{cases}$$

και λύνω αυτό το πρόβλημα για κάθε συχνότητα.
Οπότε, η λύση αυτής, θα είναι:

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(c\omega t) + B(\omega)\sin(c\omega t)$$

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \hat{u}_0(\omega)$$

$$\hat{u}_t(\omega,t) = -c\omega A(\omega)\sin(c\omega t) + c\omega B(\omega)\cos(c\omega t)$$

$$\hat{u}_t(\omega,0) = c\omega B(\omega) = \hat{U}_0(\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(\omega) = \frac{1}{c\omega}\hat{U}_0(\omega)}$$

Θέλω τώρα $\quad \hat{u}(\omega,t) \xrightarrow{F^{-1}} u(x,t)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\hat{u}_0(\omega)\cos(c\omega t) + \frac{1}{c\omega}\hat{U}_0(\omega)\sin(c\omega t)\right]e^{i\omega x}d\omega$$

Εξίσωση Θερμότητας:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

Οπότε το μετασχηματισμένο πρόβλημα θα είναι:

$$\hat{u}_t + c^2\omega^2\hat{u} = 0$$
$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{u}_0(\omega)$$

$$\hat{u}_t + c^2\omega^2\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}(\omega,t) = A(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \hat{u}_0(\omega)$$

Οπότε, η λύση ως προς ω είναι η:

$$\boxed{\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}_0(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

και αυτό θα μας δώσει τη λύση.

- $F[e^{-\frac{ax^2}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$

Θα υπολογίσω έμμεσα αυτόν τον μετασχηματισμό Fourier.
Οπότε,

$$f'(x)+axf(x)=0$$

Η $e^{-\frac{ax^2}{2}}$, είναι η λύση της εξίσωσης

$$F[f']+aF[xf]=0$$

$$i\omega\hat{f}(\omega)+ia\hat{f}'(\omega)=0$$

$$\Rightarrow \omega\hat{f}(\omega)+a\hat{f}'(\omega)=0$$

Οπότε έχω,

$$\hat{f}(\omega)=Ae^{-\frac{\omega^2}{2a}}$$

$$\text{για } \hat{f}(0)=A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{ax^2}{2}}\cdot\cancel{e^{-i0x}}^{\,1}dx$$

να το δείξω σπίτι. $\int e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx$$

$$u^2 = \frac{\alpha x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$u = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\, x$$

$$du = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Άρα

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\, \underbrace{e^{-c^2\omega^2 t}}$$

από ποιά συνάρτηση παράγεται ο μετασχ.;

Άρα ουσιαστικά θέλω: $c^2 t = \frac{1}{2\alpha}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2c^2 t}$$

Οπότε,

$$F^{-1}\left(e^{-c^2\omega^2 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2c^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}} = f(t)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega,t) = e^{-c^2\omega^2 t}$$

Οπότε, αφού

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\,\hat{f}(\omega,t)$$

τότε,

$$u(x,t) = (u_0 * f)(x,t)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{c\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2t}}\, d\xi$$

$$= \underbrace{\frac{1}{c\sqrt{4\pi t}}}_{\text{σταθερά κανονικοποίησης}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x-\xi)\,\underbrace{e^{-\frac{\xi^2}{4c^2t}}}_{\text{πυρήνας}}\, d\xi$$