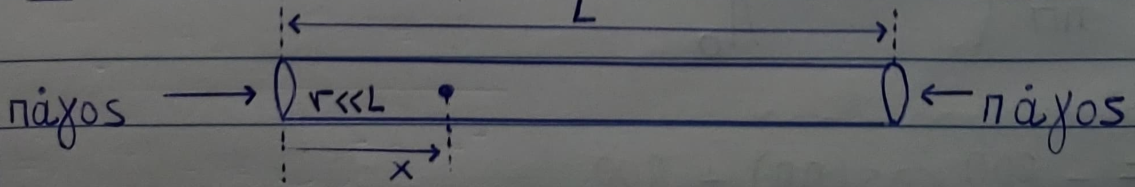
22/03/23

Εξίσωση Θερμότητας

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad , x \in (0, L) \quad , t > 0$$

Σ.Σ: $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , t > 0$

Α.Σ: $u(x,0) = u_0(x) \quad , x \in (0, L)$



Την προηγούμενη φορά είχαμε καταλήξει στο γεγονός ότι:

$$u_n(x,t) = B_n' e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum B_n' \boxed{e^{-\lambda_n^2 t}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

από αρχικές συνθήκες:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n' \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x)$$

$$\Rightarrow B_n' = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Παράδειγμα:

$u_t = \overset{c=2}{4}u_{xx}$, $x \in (0,\pi)$

$u(0,t) = u(L,t) = 0$

$u(x,0) = 100 \longrightarrow$ αρχική θερμοκρασία ράβδου ακριβώς μετά την ανάσυρση της από το ζεστό νερό ($100°C$).

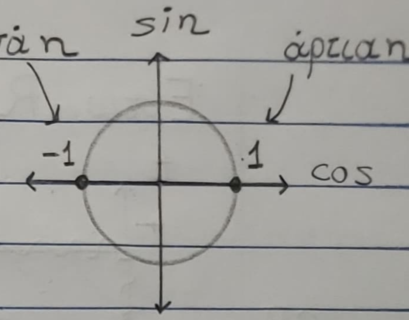
Ψάχνω τη λύση $u(x,t)$ για $x \in (0,\pi)$ και $t > 0$.

$$B_n' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100\sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{200}{n\pi}\left(\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{200}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{200}{n\pi}$$

$$= \frac{200}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$



Οπότε,

$$B_n = \begin{cases} 0 & , n \text{ άρτιος} \\ \frac{400}{n\pi} & , n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$\lambda_n = c\,\frac{n\pi}{L}$

όπου: $\lambda_n = 2n$

και $L = \pi$.

Οπότε η ακριβής λύση είναι η εξής:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{400}{(2k+1)\pi}} \sin((2k+1)x)\, \underbrace{e^{-4(2k+1)^2 t}}_{\text{όρος απόσβεσης}}$$

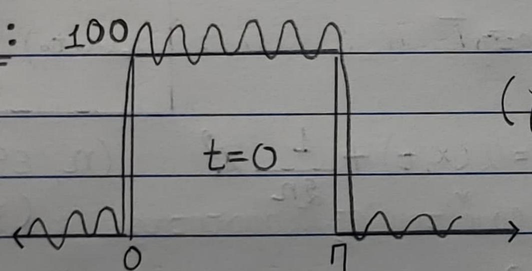
↳ μικραίνει την τάξη του αθροίσματος

$$\Rightarrow u(x,t) \approx \frac{400}{\pi}\sin(x)e^{-4t} + \frac{400}{3\pi}\sin(3x)e^{-36t}$$

(Επειδή μικραίνει γι'αυτό είναι περίπου ίσο για $k=0$ και $k=1$

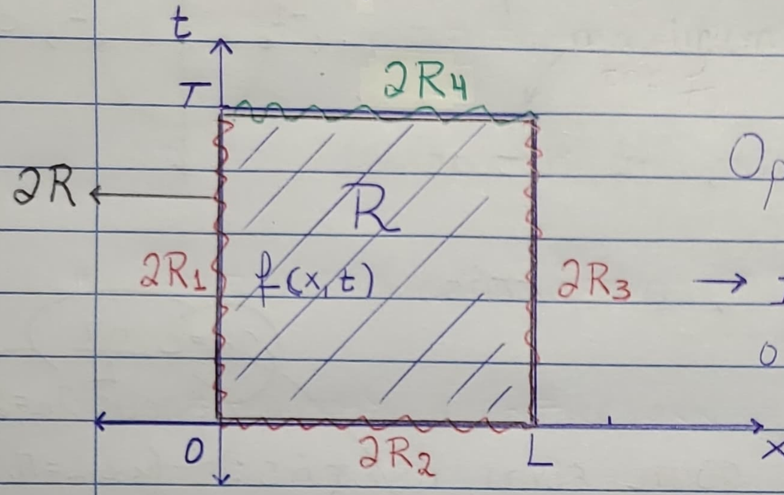
↳ διότι το t είναι ικανοποιητικά μεγάλο).

plot:



(για $t=0$ έχω το μέγιστο σφάλμα μου)

Έστω $R_T=\{(x,t) \mid x\in(0,L),\ t\in(0,T)\}$ ορθογώνιο



$\exists\ f_t, f_x, f_{xx}$

Ορίζω επίσης το $\bar{R}=R\cup\underbrace{\partial R}_{\text{σύνορο του } R}$

→ Η f είναι συνεχής, οπότε θα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο $\bar{R}$. (όχι το sup, αλλά το max)

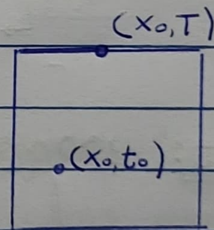
- Το maximum η f θα το λαμβάνει στο κόκκινο σύνορο (όχι στην πάνω πλευρά διότι εκεί οι παράγωγοι θα έχουν (διαφορετική) άλλη τιμή σε σχέση με τις τιμές που θα έχουν στο κόκκινο σύνορο).

Έστω ότι η f έχει μέγιστο στο σημείο (x_0,t_0).
Η εξίσωση μου είναι η $u_t=c^2u_{xx}$.

$f_{xx}(x_0,t_0)\leq 0$

$f_t(x_0,t_0)=0$, $t_0<T$

$f_t(x_0,t_0)\geq 0$, $t_0=T$



Έστω τώρα $f(x,t)=\underbrace{u(x,t)}_{\text{λύση της εξ. θερμότητας}}+\frac{1}{2n}x^2$ (n, ελεγχόμενο) (n>0)

Αν, $\underbrace{f_t}_{\text{ανεξ. του } x} \doteq u_t$

$\Rightarrow f_{xx}=u_{xx}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}>u_{xx}$

Τώρα θα εξετάσουμε τι γίνεται με τη μέγιστη τιμή της f.

1. $(x,t)\in \overbrace{R\cup\partial R_4}^{\partial R_4}$

Θ.ν.δ.ο $f_t<c^2f_{xx}$

προσθέτουμε

$$\Rightarrow f_t = u_t = c^2 u_{xx} < c^2 \overbrace{\left(u_{xx}+\frac{1}{n}\right)}^{f_{xx}}$$

$$= c^2 f_{xx}$$ ισχύει η $f_t < c^2 f_{xx}$ $\forall\, t \in (0,T)$

② Υποθέτω τώρα ότι η f έχει μέγιστο $(x_0,t_0) \in R \cup \overbrace{\partial R_4}^{\partial R_4}$

Θέλω να ισχύει το ακρότατο $f_t(x_0,t_0)=0$

και $f_{xx}(x_0,t_0) \leq 0$.

$$f_{xx}(x_0,t_0) \leq 0 \xrightarrow[\text{με } c^2]{\text{πολ/ζω}} c^2 f_{xx}(x_0,t_0) \leq 0$$

Όμως από πριν όπου $f_t < c^2 f_{xx} \leq 0$

Όμως αυτό είναι αρνητικό, ενώ εγώ θέλω να είναι μηδέν.

→ Άτοπο, άρα η f λαμβάνει μέγιστο στο $\partial R_1 \cup \partial R_2 \cup \partial R_3$.

③ Τώρα θέλω να δείξω ότι τελικά το ίδιο κάνει και η u.

$f \leq M + \frac{L^2}{2n}$, όπου M είναι το μέγιστο της u στο $\partial R_1 \cup \partial R_2 \cup \partial R_3$ (κόκκινο σύνορο).

Η f έχει τη μορφή: $\boxed{f = u + \frac{x^2}{2n}}$ στο $\partial R_1 \cup \partial R_2 \cup \partial R_3$

Ο όρος $\frac{x^2}{2n}$ φράσσεται αν για $x=L \Rightarrow \frac{L^2}{2n}$ $\quad x \in [0,L]$

Οπότε, $f \leq M + \frac{L^2}{2n}$ $\forall n$. $\quad f \leq f_{\partial R_1 \cup \partial R_2 \cup \partial R_3}$

④ Έτσι,

$$u(x,t) = f(x,t) \overbrace{- \frac{x^2}{2n}}^{\leq 0} \leq f(x,t) \leq M + \frac{L^2}{2n}$$

εγώ την ψάχνω!

$\partial R_1 \cup \partial R_2 \cup \partial R_3 \subseteq (\partial R_4)^c$

συμπλήρωμα

$$\xrightarrow{n \to +\infty} u(x,t) \leq M \quad \forall (x,t) \in \bar{R}$$

Άρα η μέγιστη τιμή της u είναι στο σύνορο.

- Για το ελάχιστο:

$$v = -u \Longrightarrow \quad v_t = c^2 u_{xx}$$

Το μέγιστο της v είναι στο σύνορο.
Άρα, το ελάχιστο της u είναι στο σύνορο.

(*) $u_t = c^2 u_{xx}$
$u(0,t) = g_1(t) \quad , \; u(L,t) = g_2(t)$
$u(x,0) = u_0(x)$

Τι μπορώ να πω τώρα για τη λύση μου $u(x,t)$ με την έξτρα πληροφορία;

$$\left.\begin{aligned} M &= \max(g_1, g_2, u_0) \\ m &= \min(g_1, g_2, u_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m \leq u(x,t) \leq M$$

Με άλλα λόγια να βρω ένα M τ.ω $g_1, g_2, u_0 < M$.

- Μοναδικότητα της λύσης:

Έστω u_1, u_2 είναι λύσεις της (*)

$w = u_1 - u_2$
$w_t = c^2 w_{xx}$
$w(0,t) = u_1(0,t) - u_2(0,t) = 0 = w(L,t)$
$w(x,0) = 0$

$\Rightarrow 0 \leqslant \omega \leqslant 0$

$\Rightarrow \omega = 0$ παντού

$\Rightarrow u_1 = u_2$ παντού

Άρα δεν μπορεί να έχει δύο λύσεις.
Οπότε η λύση μου είναι μοναδική