22/02/23

f: 2ρ-περιοδική

περιττή

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right)$$

Συντελεστές Fourier

i) f: άρτια και 2ρ-περιοδική

- $f(x) = f(-x) \quad \forall x$
- $f(x+2\rho) = f(x) \quad \forall x$

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

για $\forall b_n = 0, n = 1, \ldots$

Για άρτιες:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right)$$

ii) f: περιττή και 2ρ-περιοδική

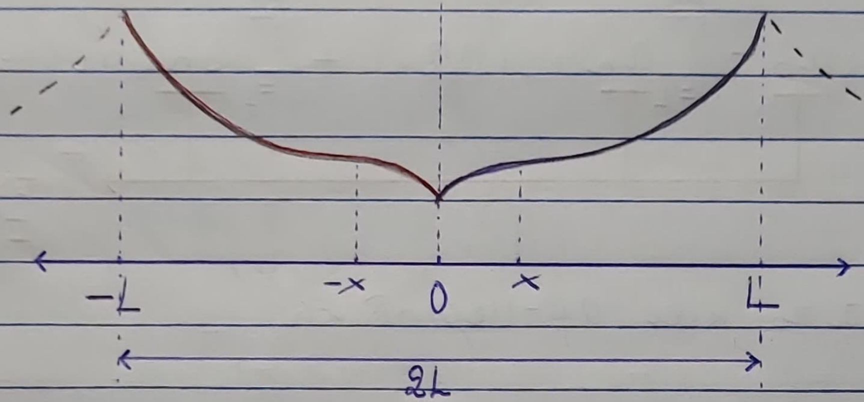
- $f(x) = -f(-x) \quad \forall x$
- $f(x+2\rho) = f(x) \quad \forall x$

Για περιττές:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right)$$

- Άρτια Επέκταση: (άρτια+περιοδική) ← θέλω

$f:[0,L]\to\mathbb{R} \Rightarrow \tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



όπου,

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in(0,L) \\ f(-x) & , x\in(-L,0) \\ f(x+2L) & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

αν περιορίσω το x σε $x\in[0,L]$ τότε η $\tilde{f}(x)$ γίνεται $f(x)$.

Αυτή γράφεται από την εξής σειρά Fourier:

$$\tilde{f}(x)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \forall x\in\mathbb{R}$$

- Πως υπολογίζονται τώρα οι συντελεστές Fourier;

$$\alpha_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\tilde{f}(x)\,dx \overset{\text{αρτιότητα}}{=\!=\!=} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{0}\tilde{f}(x)dx+\frac{1}{2L}\int_{0}^{L}\tilde{f}(x)dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{0} f(-x)\,dx + \frac{1}{2L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$\vdots$$

(με αλλαγή μεταβλητής) $= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$

Τώρα, για $n \geq 1$ έχω:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Για μια τυχαία συνάρτηση $f: [0,L] \to \mathbb{R}$. Τότε

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

με $a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx \quad \forall\, x \in [0,L]$

(VIP! Όταν έχω γινόμενο άρτιων συναρτήσεων, το αποτέλεσμα θα είναι μια άρτια συνάρτηση. Δηλαδή,

!

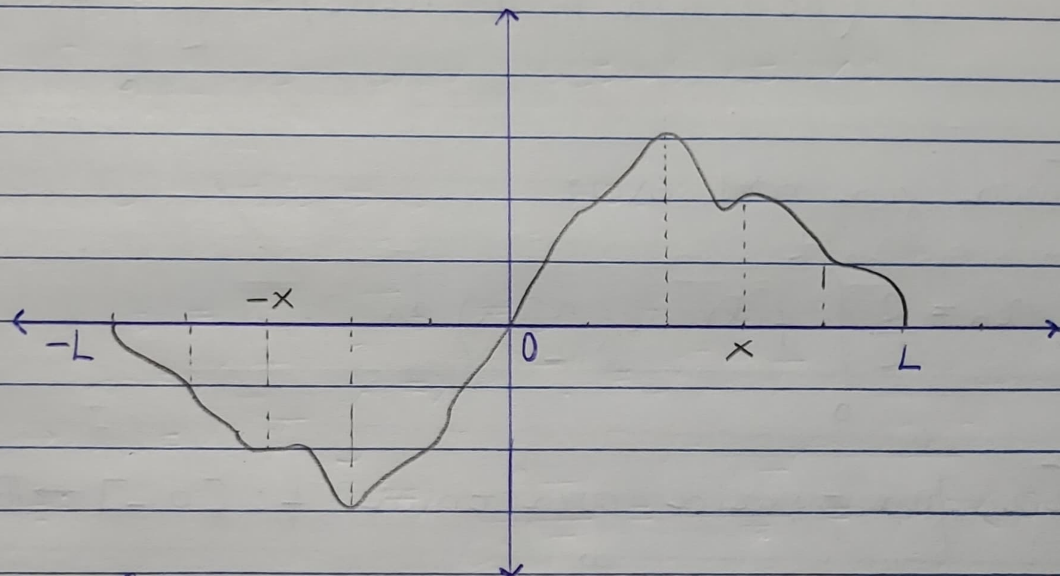
$$f(x)g(x) = f(-x)g(-x).$$

και το γινόμενο άρτιας με περιττής είναι μια περιττή συνάρτηση.)

- Περιττή Επέκταση: (μπορεί να γίνει και άρτια)

$f:[0,L]\to\mathbb{R}$

$f(0)=0$



$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) &, x\in(0,L) \\ -f(-x) &, x\in(-L,0) \\ f(x+2L) &, \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οπότε θα γράφεται ως εξής:

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

και,

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\tilde{f}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

* (περιττή · περιττή = άρτια)

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Οπότε, $\forall\, x \in [0, L]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

με,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

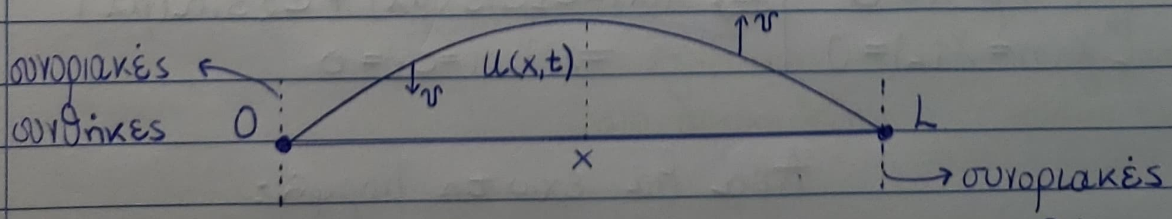
Εξισώσεις $2^{ης}$ Τάξης

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}) = 0$$

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

- $B^2 - AC < 0$, elliptic
- $B^2 - AC > 0$, hyperbolic
- $B^2 - AC = 0$, parabolic

- Κυματική Εξίσωση: (1D)



$t > 0$ και $x \in [0, L]$

Με εξίσωση: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ } συνοριακές συνθ.

$u(x,0) = u_0(x)$, $x \in (0,L)$ } αρχικές συνθ.

$u_t(x,0) = v_0(x)$, $x \in (0,L)$

VIP! • **Μέθοδος Χωριζομένων Μεταβλητών:**

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \neq 0 \quad \forall\, x \in (0,L)$$

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= X \cdot T'' \\ u_{xx} &= X'' T \end{aligned}\right\} \Rightarrow XT'' = c^2 X'' T \quad (1)$$

χωρική → μεταβλητή

$$\Rightarrow \frac{\cancel{X} T''}{c^2 \cancel{X} T} = \boxed{\frac{X'' \cancel{T}}{X \cancel{T}} = -\mu^2} < 0$$

όπου μ σταθερά.

Τώρα όσο για τις συνοριακές συνθήκες:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = X(L)T(t) = u(L,t) = 0 \quad , \forall\, t > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X(0) = X(L) = 0} \quad (2)$$

Αν πάρω τις (1) και (2), θα έχω μια εξίσωση πρώτου βαθμού. (χαρακτηριστικό πολυώνυμο).

$$\left\{\begin{aligned} &X'' + \mu^2 X = 0 \\ &X(0) = X(L) = 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$

$$\Rightarrow X(0) = c_1 = 0$$

Άρα θα έχω τη μορφή:

$$X_n(x) = c_2 \sin(\mu_n x).$$

$\to \mu, L$? που να μηδενίζει.

Επίσης, θέλω: $X_n(L) = c_2 \sin(\mu_n L) = 0$

$$\Rightarrow \mu_n L = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}^+$$

$$X_n(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

χρονική εξίσωση $\leftarrow T_n''(t) + (c\mu_n)^2 T(t) = 0$

Οι λύσεις που μπορώ να έχω είναι:

$$\boxed{T_n(t) = b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n^* \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)}$$

Έτσι μπορώ να περιγράψω την γενική λύση ως:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

- Οπότε, η εξίσωση είναι γραμμική, εάν u_n, $n \geq 1$ είναι λύσεις, τότε,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

Θα είναι λύση.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left[\underbrace{b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)}_{\text{εξαρτάται απο αρχική θέση}} + \underbrace{b_n^* \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)}_{\text{εξαρτάται απο αρχική ταχύτητα}}\right]$$

$u(x,0) = u_0(x)$

$$\Rightarrow u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad , x \in [0, L]$$

(Περιττή Επέκταση $\tilde{u}_0$)

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \frac{cn\pi}{L} \left[-b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + b_n^* \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) \right]$$

και θέλω όταν εμφανίσω την αρχική συνθήκη για την ταχύτητα που ξέρω ότι είναι:

$u_t(x,0) = U_0(x)$

$$U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{L} b_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$b_n^* = \frac{\cancel{L}}{cn\pi} \cdot \frac{2}{\cancel{L}} \int_0^L U_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$