20/03/23

Εξίσωση Θερμότητας/Διάχυσης:

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad , \; t>0 \; , \; x \in (0,L)$$

Σ.Σ: $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \; t>0$

Α.Σ: $u(x,0) = u_0(x) \quad , \; x \in (0,L)$

Εδώ θέλω μόνο μια αρχική συνθήκη διότι η παράγωγος είναι πρώτης ως προς το χρόνο.

Ουσιαστικά, εδώ το παράδειγμα είναι ότι έχω μια ράβδο μήκους L και αμελητέας διαμέτρο σε σχέση με το μήκος της. Την βυθίζουμε σε ζεστό νερό για να

(να φθάσει τους 100°C)

θερμανθεί όλο το σώμα/ράβδος. Έπειτα την βγάζουμε απο το δοχείο με το ζεστό περιβάλλον και αμέσως της τοποθετούμε στα άκρα πάγο. Ο πάγος θα παραμένει στα άκρα μέχρι η θερμοκρασία της ράβδου να είναι σε όλο της το μήκος στους 0°C.

Οπότε, ψάχνω λύσεις της μορφής:

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad \forall\, t\geq 0 \quad \forall\, x\in[0,L]$$
$$u_t=X(x)T'(t)$$
$$u_{xx}=X''(x)T(t)$$

Απο, $u_t=c^2u_{xx}$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{X}T'}{c^2\cancel{X}T}=\frac{X''\cancel{T}}{X\cancel{T}}$$

①

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{T'}{c^2T}}_{\text{συνάρτηση } t}=\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{συνάρτηση } x}=\text{σταθερά}$$

②

$$\begin{cases} X''-kX=0 \\ T'-c^2kT=0 \end{cases}$$

Ερώτημα:
Τι ισχύει για τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες μετά απο αυτή την αλλαγή;

- συνοριακές συνθήκες:

$$X(0)T(t)=X(L)T(t)=0 \qquad \forall\, t>0$$

$$\Rightarrow \boxed{X(0)=X(L)=0}\ , \ \forall\, t>0$$

Συνεπώς οι λύσεις που θέλω είναι για $\kappa < 0$.
Άρα, $\kappa = -\mu^2 < 0$.

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad , x \in (0, L)$$
$$X(0) = X(L) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$
$$X(0) = A = 0 \quad (\text{απο } \Sigma.\Sigma)$$
$$\Rightarrow X(x) = B\sin(\mu x)$$

Θέλω $X(L) = B\sin(\mu L) = 0$.

$$\Rightarrow \mu_n L = n\pi$$, όπου μ_n: ακολουθία και $n = 1, \ldots$ (χ.β.γ)

Ετσι έχω μια οικογένεια απο λύσεις:

$$X_n(x) = B_n \sin(\mu_n x)$$
$$= B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Το πρόβλημα,

$$\begin{cases} X'' - \kappa X = 0 \\ T' - c^2 \kappa T = 0 \leftarrow \end{cases}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή,

$$T_n'(t) + c^2 \mu_n^2 T_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_n(t) = \underbrace{C_n e^{-c^2 \mu_n^2 t}}_{\text{όρος απόσβεσης}}}$$ Απόσβεση

$$u_n(x,t)=X_n(x)\,T_n(t) \quad , \; n=1,2,\dots$$

$$= B_n' e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Θέλω να προσδιορίσω τα B_n για να βρω τη γενική λύση:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n' e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- αρχικές συνθήκες:

$$u(x,0)=u_0(x)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n' \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{περιττή συνάρτηση}} \quad , \; \forall x\in(0,L)$$

$$B_n'=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Τελικά μια καλή προσέγγιση είναι η εξής:

$$u(x,t)\simeq B_1' e^{-c^2\frac{\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

Ερώτημα:

Τι θα συμβεί σε άπειρο χρόνο;

κατάσταση ισορροπίας: $t\to\infty$

$$u(x,t)\simeq u(x)$$

Πολύ μικρή εξάρτηση ως προς τον χρόνο σημαίνει ότι η παράγωγος του χρόνου είναι αμελητέα.

$$u_t \approx 0$$

$$\Rightarrow u_{xx} \approx 0$$

$$\Rightarrow u(x) = ax + b$$

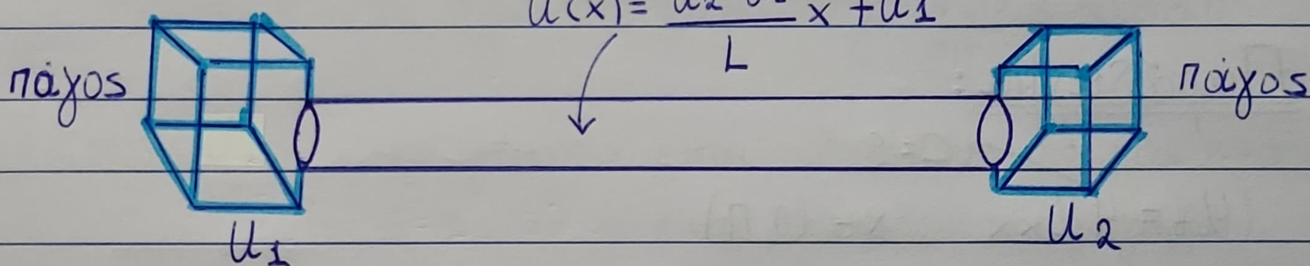
$$u(0) = u(L) = 0$$

$$u(0) = b = 0$$

$$u(x) = \alpha x \Rightarrow u(L) = \alpha L = 0$$

Άρα σε κάποια στιγμή αναμένω η θερμοκρασία της ράβδου να φτάσει τους 0°C. (σε άπειρο χρόνο)

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1$$



Με γραμμικό τρόπο θα πρέπει να πηγαίνει από την $u_1 \to u_2$.