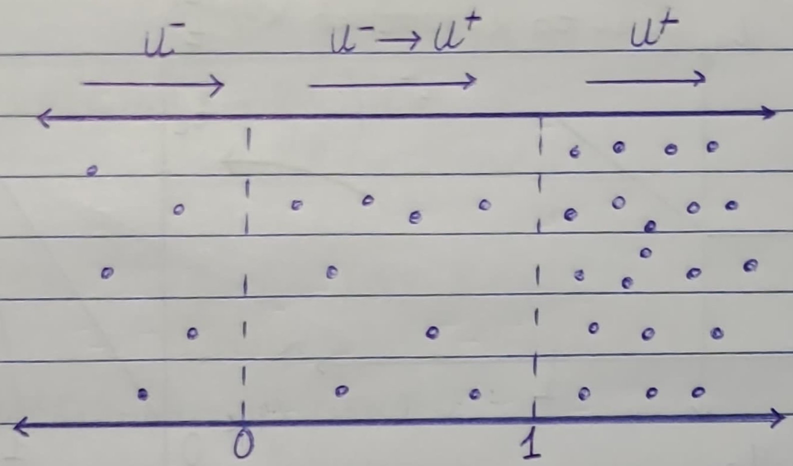
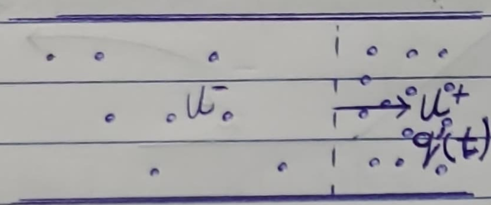
20/02/23



$\Delta u = u^+ - u^-$



i) $t < t_c$:

$$u(x,s) = u_0(s) = \begin{cases} u^-, & s \leq 0 \\ u^- + s\Delta u, & s \in (0,1) \\ u^+, & s \geq 1 \end{cases}$$

(* Θα δούμε τώρα πως θα διώξουμε τα s, ώστε η λύση μου να δίνεται από x και t).

$$\boxed{x = c_\mu\left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right)t + s}$$

- $s \leq 0 \Rightarrow x = c_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t + s$

$$s = x - c_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq c_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t} \Leftrightarrow \boxed{s \leq 0}$$

- $s \geq 0 \Rightarrow s = x - c_\mu\left(1 - \frac{2u^+}{u_\mu}\right)t \geq 1$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq 1 + c_\mu\left(1 - \frac{2u^+}{u_\mu}\right)t} \Leftrightarrow \boxed{s \geq 1}$$

$$C_1(t) = C_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t$$

$$C_2(t) = 1 + C_\mu\left(1 - \frac{2u^+}{u_\mu}\right)t$$

μένει να διώξω μόνο αυτό το S.

$$u(x,t) = \begin{cases} u^- , & x \leq C_1(t) \\ u^- + s\Delta u , & x \in (C_1(t), C_2(t)) \\ u^+ , & x \geq C_2(t) \end{cases}$$

- $s \in (0,1)$

$$x = C_\mu\left(1 - \frac{2(u^- + s\Delta u)}{u_\mu}\right)t + s$$

$$x = \underbrace{C_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t}_{C_1(t)} - C_\mu\frac{2s\Delta u t}{u_\mu} + s$$

$$s\left(1 - C_\mu\frac{2\Delta u t}{u_\mu}\right) = x - C_1(t)$$

$$\boxed{s = \frac{x - C_1(t)}{1 - C_\mu\frac{2\Delta u t}{u_\mu}}}$$

(*Μένει απλά να δω με ποιά ταχύτητα θα πηγαίνει το κύμα.)

ii) $t \geq t_c$: $\boxed{q'(t) = \frac{\Delta F}{\Delta u}}$

$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0 \\ F = C(u)u = C_\mu\left(1 - \frac{u}{u_\mu}\right)u = C_\mu\left(u - \frac{u^2}{u_\mu}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta F = C_\mu \left[u^+ - u^- - \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{u_\mu} \right]$$

$$= \overbrace{(u^+ - u^-)}^{\Delta u} C_\mu \left[1 - \frac{(u^+ + u^-)}{u_\mu} \right]$$

$$\Rightarrow q'(t) = C_\mu \left[1 - \frac{u^+ + u^-}{u_\mu} \right] \longrightarrow$$ η ταχύτητα με την οποία ταξιδεύει η ασυνέχεια (και βέβαια εξαρτάται απο τα ημιεπίπεδα).

(Δημιουργία κρουστικού κύματος)

Παράδειγμα:

$$u_t + \underbrace{u u_x}_{\text{μη γραμμικός όρος}} = 0 \quad \text{(μη γραμμική)}$$

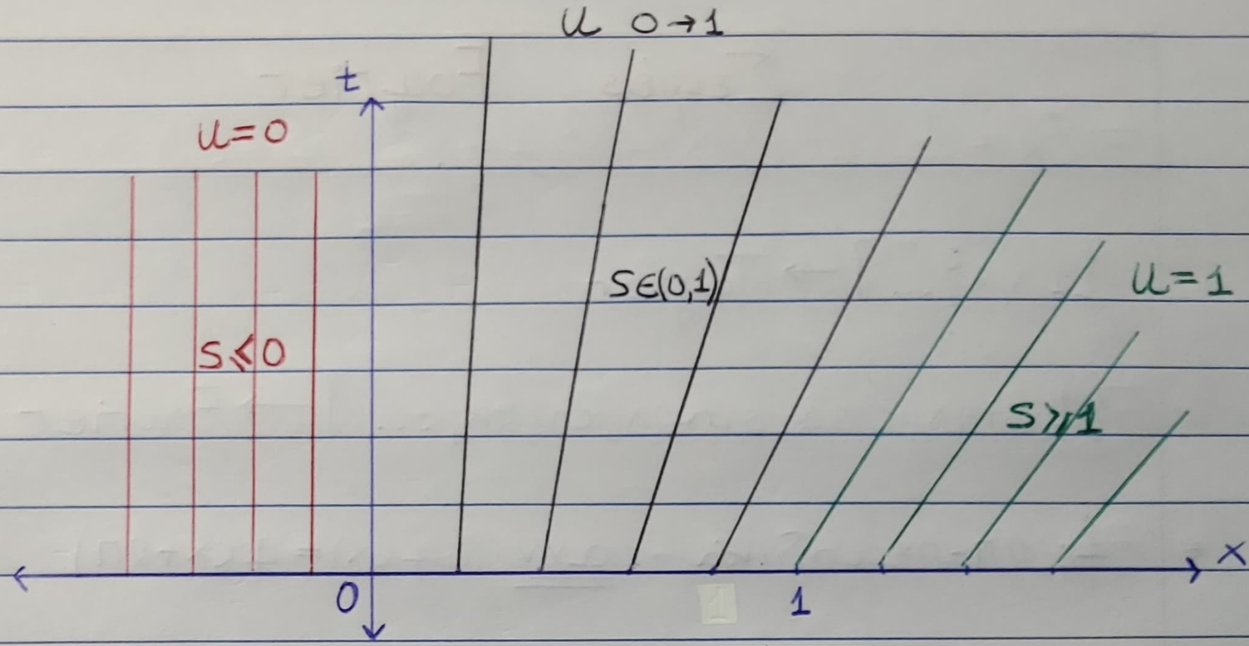
$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$x = u_0(s)t + s$

$t = \tau$

$$u = u_0(s) = \begin{cases} 0, & s \leqslant 0 \\ s, & s \in (0,1) \\ 1, & s \geqslant 1 \end{cases}$$

- Πως μοιάζουν οι χαρακτηριστικές;



- $s \leq 0 \quad u_0 = 0 \quad x = s$
- $s \geq 1 \quad u_0 = 1 \quad x = t + s$ (κλίση 45° και μετά μετατοπίζεται)
- $s \in (0,1) \quad u_0 = s \quad x = st + s$

- <u>Μερικά χρήσιμα ολοκληρώματα:</u>

- $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \delta_{mn}$$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \quad , \forall\, m,n \in \mathbb{Z}$$

Σειρές Fourier

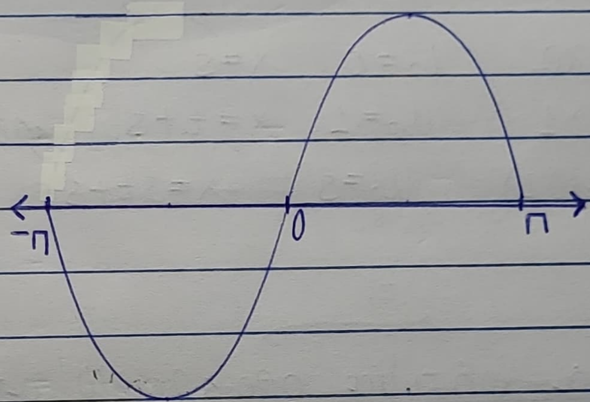
$\{1, x, x^2, \dots\} \rightarrow$ Taylor

$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\} \rightarrow$ Fourier

- f: 2π-περιοδική <u>ανν</u> $f(x) = f(x+2\pi)$

<u>Παράδειγμα:</u>

$f(x) = \sin(x)$



- Έστω f: 2π-περιοδική (πραγματική) τότε $\exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$

τ.ω,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

πολ/ζω με $\cos(mx)$:

$$\cos(mx) \cdot f(x) = a_0 \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\cos(mx)$$

ολ/νω:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)\cos(mx) \overset{n=m}{=\!=} a_n \pi.$$

για $n \geq 1$: $$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,dx}$$

Ομοίως ακολουθώντας την αντίστοιχη διαδικασία θα πάρω:

για $n \geq 1$: $$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx$$

$$= a_0 \cdot 2\pi + \underbrace{\cancel{\sin(n\pi)\Big|_{-\pi}^{\pi}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}}_{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

Ορίζω την $$S_N = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

- αν το υπολογίσω για κάποιο N, θα πάρω προσέγγιση
- αν το υπολογίσω στο άπειρο $(+\infty)$, θα την βρω ακριβώς.

$$S_N \xrightarrow{N \to +\infty} f$$

$$\lim_{N \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx}_{:= E_N} = 0$$

$$\Rightarrow E_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \alpha_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2 + b_n^2)$$

- Επέκταση Σειρών Fourier για άλλες περιόδους :

Έστω f είναι 2ρ-περιοδική, $\rho>0$

$g(x) = f\left(\frac{\rho}{\pi}x\right)$, όπου g είναι 2π-περιοδική

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{\rho}{\pi}x + \frac{\rho}{\cancel{\pi}}\cdot 2\cancel{\pi}\right)$$

$$= f\left(\frac{\rho}{\pi}x + 2\rho\right)$$

$$= f\left(\frac{\rho}{\pi}x\right) = g(x).$$

Άρα $g(\tilde{x}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\tilde{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\tilde{x})$

για $n\geq 1$: $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{x})\cos(n\tilde{x})\,d\tilde{x}$

- αλλαγή μεταβλητής : $\tilde{x} \rightarrow x$

$\tilde{x} = \frac{\pi}{\rho}x$, $g(\tilde{x}) = f\left(\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\rho}x\right) = f(x)$

$d\tilde{x} = \frac{\pi}{\rho}dx$, $x = \frac{\rho}{\pi}\tilde{x}$

vip!

$$\alpha_n = \frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\rho}\cdot\int_{-\rho}^{\rho} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\rho}x\right)dx$$

Báon : $\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)\Big|_{n\in\mathbb{Z}^+}, \sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)\Big|_{n\in\mathbb{Z}^+} \right\}$