15/02/2023

Την προηγούμενη φορά είχαμε πει,

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_\tau = u, & x(0,s) = s \\ t_\tau = 1, & t(0,s) = 0 \end{array}\right\} t=\tau \quad \boxed{x = u_0(s)\,t + s}$$

$$u_\tau = 0, \quad u(0,s) = u_0(s) \Rightarrow u(\tau,s) = u_0(s)$$

Τώρα έχω,

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1-x, & x \in (0,1) \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$t_c = 1$

Εάν $t < t_c$

$$u(x,t) = u_0(\overset{\overset{x-u_0 t}{\parallel}}{s}) = \begin{cases} 1, & s \leq 0 \\ 1-s, & s \in (0,1) \\ 0, & s \geq 1 \end{cases}$$

- $s \leq 0, \quad s = x - \overset{\overset{1}{\parallel}}{u}\,t \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq t}$
- $s \geq 1, \quad s = x - \underset{\underset{0}{\parallel}}{u}\,t \geq 1 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$

αχρείαστο? $s \in (0,1) \quad 0 < x - ut < 1 \Longrightarrow 0 < x - (1-s)t < 1$

Είχα βρει ότι, $t = \dfrac{x-s}{1-s} \Rightarrow \boxed{s = \dfrac{x-t}{1-t}}$

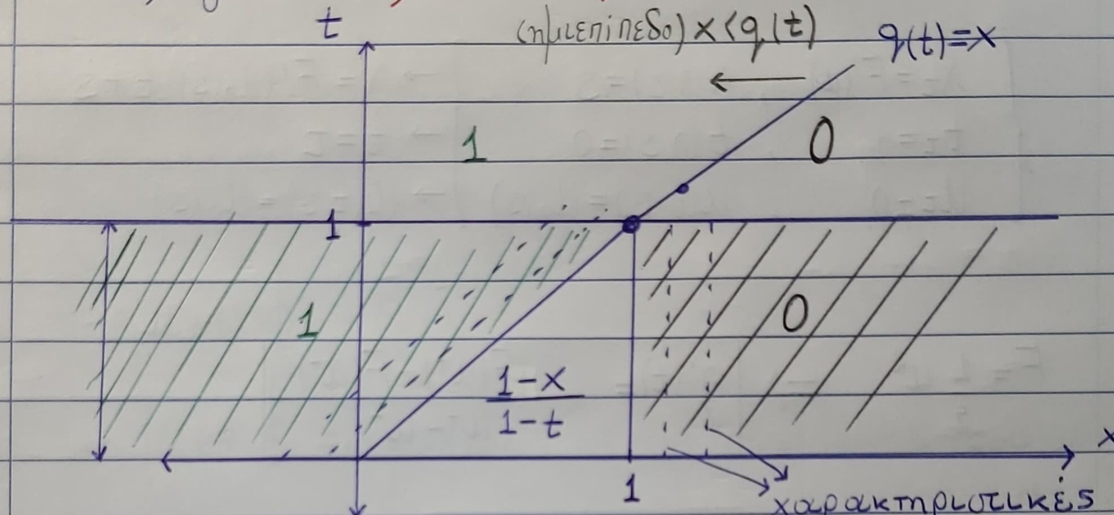
$$0 < \frac{x-t}{1-t} < 1 \Rightarrow 0 < x - t < 1 - t$$

$$\Rightarrow \boxed{t < x < 1}$$

Οπότε,

$$u(x,t)=\begin{cases} 1 & , \ x \leq t \\ \underbrace{\left(1-\dfrac{x-t}{1-t}\right)}_{\frac{1-x}{1-t}} & , \ x \in (t,1) \\ 0 & , \ x \geq 1 \end{cases} \quad , \ \forall t<1$$

και λέγεται κλασική λύση.



$$q'(t)=\frac{1}{2}(u^{+}+u^{-})$$

$$\left.\begin{aligned} q'(t)=\frac{1}{2} \Longrightarrow q(t)=\frac{1}{2}t+c \\ q(1)=1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow q(t)=\frac{1}{2}(t+1)$$

- Οπότε η λύση μου για $t \geq 1$ θα είναι η εξής:

$$u(x,t)=\begin{cases} 1 & , \ x<\frac{1}{2}(t+1) \\ 0 & , \ x>\frac{1}{2}(t+1) \end{cases}$$

και λέγεται ασθενής λύση (λόγω μη γραμμικότητας)

Παράδειγμα:

$$u_t + (F(u))_x = 0 \qquad \left[(F(u))_x = F'(u)\cdot u_x = \frac{d}{du}F(u) \right]$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$(x,t) \to (\tau, s)$$

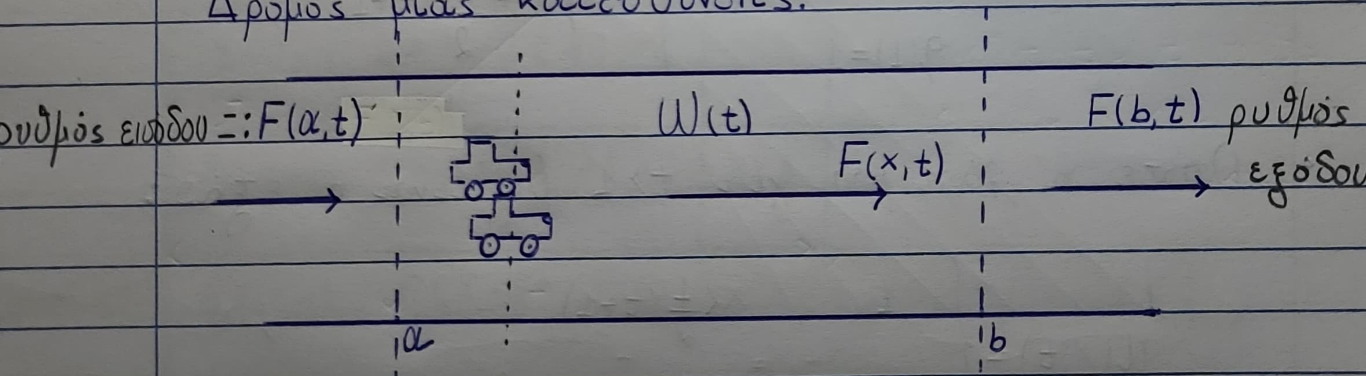
$$\begin{cases} x_\tau = F'(u), & x(0,s) = s \\ t_\tau = 1, & t(0,s) = 0 \\ u_\tau = 0, & u(0,s) = u_0(s) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\to x = F'(u_0(s))\,t + s \\ &\to t = \tau \\ &\to u(\tau,s) = u_0(s) \end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{2}u^2 \Rightarrow \boxed{q'(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}}$$

$$\Rightarrow \boxed{q'(t) = \frac{\Delta F}{\Delta u}}$$

- **Εφαρμογή: (Traffic flow)**

Δρόμος μίας κατεύθυνσης.



$$\frac{d}{dt}N(t) = F(\alpha,t) - F(b,t) \qquad \left(\text{μονάδες μέτρησης: } \frac{\text{αυτοκίνητα}}{\text{χρόνος}}\right)$$

$u(x,t)$: Πυκνότητα των αυτοκινήτων στο σημείο x, τον χρόνο t.

$$N(t)=\int_{\alpha}^{b} u(\xi,t)\,d\xi$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{x} u(\xi,t)\,d\xi = F(\alpha,t)-F(x,t)$$

ανεξάρτητο του x

$$\int_{\alpha}^{x} u_t(\xi,t)\,d\xi = F(\alpha,t)-F(x,t)$$

∂x

$$\Rightarrow u_t(x,t) = -F_x(x,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_t + F_x = 0}$$

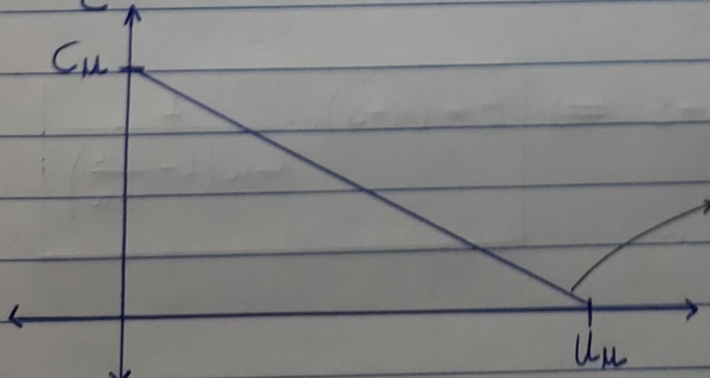
ως προς την πυκνότητα του u (την πυκνότητα των αυτοκινήτων στον δρόμο).

$$\boxed{u(x,0)=u_0(x)}$$

εξαρτάται από την ταχύτητα των αυτοκ.

$$F:\ \frac{\text{αυτοκ.}}{\text{χρόνος}} \longrightarrow \underbrace{\frac{\text{αυτοκ}}{\text{απόσταση}}}_{\text{πυκνότητα}(u)} \cdot \underbrace{\frac{\text{απόσταση}}{\text{χρόνος}}}_{\text{ταχύτητα } (c(u)\searrow)}$$

$$F(u)=c(u)\cdot u$$



$$c(u)=c_\mu\left(1-\frac{u}{u_\mu}\right)$$

(δεν είναι απαραίτητο να είναι γραμμική. Εδώ το κάνω για απλούστευση)

(παραγωγίζω)

$$\Rightarrow (F(u))_x = c_\mu \left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right) u_x$$

Τώρα το πρόβλημα μας είναι:

$$\begin{cases} u_t + \overbrace{c_\mu \left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right) u_x}^{(F(u))_x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

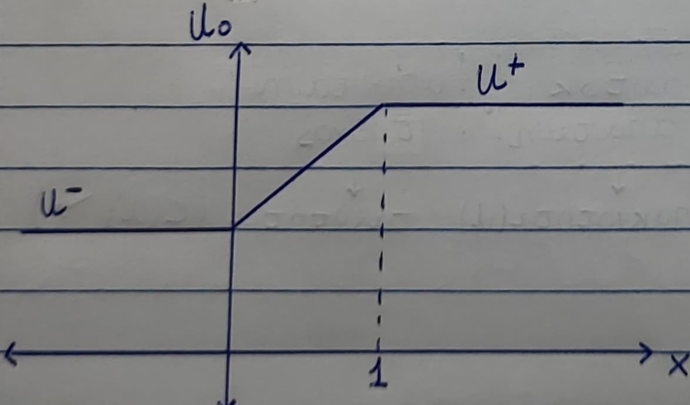
(c_μ: μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει η ροή)

$$\left.\begin{array}{ll} x_\tau = c_\mu \left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right) & , \; x(0,s) = s \\ t_\tau = 1 & , \; t(0,s) = 0 \\ u_\tau = 0 & , \; u(0,s) = u_0(s) \end{array}\right\} \boxed{x = c_\mu \left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right) t + s}$$

χαρακτηριστικές

$$u_0(x,0) = \begin{cases} u^-, & x \leq 0 \\ u^- + x(u^+ - u^-) \\ u^+, & x \geq 1 \end{cases}$$

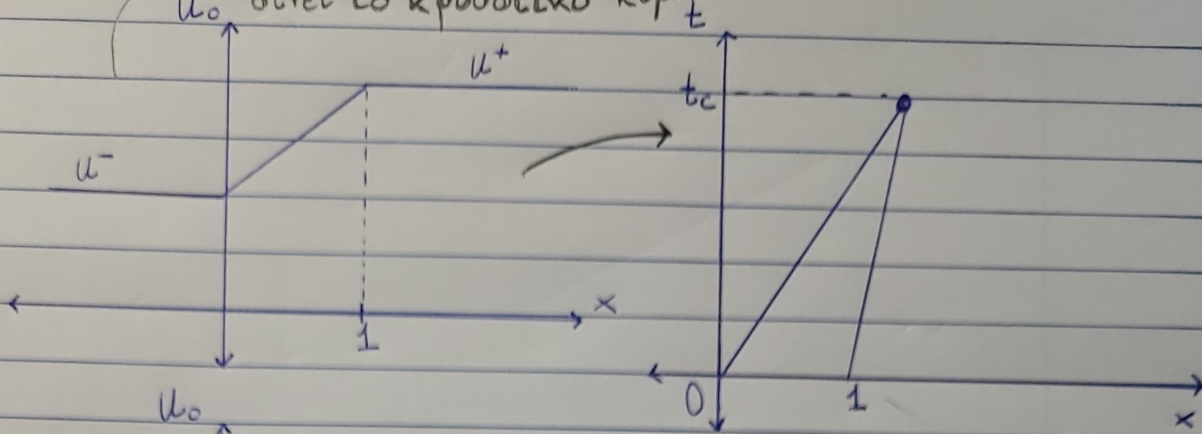
εγώ παίρνω ένα παράδειγμα.

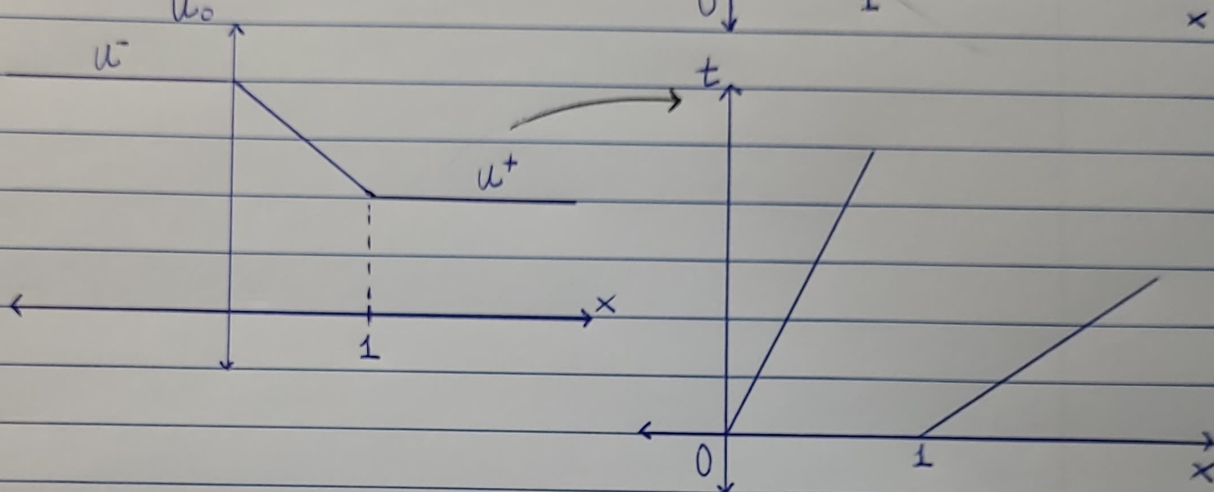


* όσο αυξάνει η πυκνότητα, τόσο θα μικραίνει η κλίση της χαρακτηριστικής.

$$x = c_\mu \left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right) t + s \Rightarrow \boxed{t = (x-s) \cdot \frac{1}{c_\mu \left(1 - \frac{2u}{u_\mu}\right)}}$$

Αυτή η εικόνα μου δίνει το κρουστικό κύμα.





- $\underline{s \leq 0}$: $s=0$ (δεξιότερη)

$$x = c_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t_c \qquad (*)$$

- $\underline{s \geq 1}$: $s=1$ (αριστερότερη)

$$x = c_\mu\left(1 - \frac{2u^+}{u_\mu}\right)t_c + 1 \qquad (**)$$

$$c_\mu\left(1 - \frac{2u^-}{u_\mu}\right)t_c = c_\mu\left(1 - \frac{2u^+}{u_\mu}\right)t_c + 1$$

$$c_\mu t_c\left(\cancel{1} - \frac{2u^-}{u_\mu} - \cancel{1} + \frac{2u^+}{u_\mu}\right) = 1$$

$$\frac{2c_\mu}{u_\mu}\Delta u\, t_c = 1 \Rightarrow \boxed{t_c = \frac{u_\mu}{2c_\mu \Delta u}}$$