13/03/23

Λύση d'Allembert:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad x \in (0,L) \quad , \quad t > 0$$

ΑΣ: $u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in (0,L)$

$u_t(x,0) = U_0(x)$

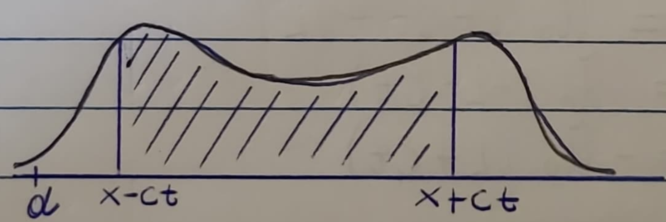
ΣΣ: $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad \forall x \in (0,L), \ \forall t > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x-ct) + \tilde{u}_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{U}_0(s)\,ds$$

Ορίζω,

$$V(x) = \int_{a}^{x} \tilde{U}_0(s)\,ds \qquad (\text{Αντι-παράγωγος}),\ a \to -\infty$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x-ct) + \tilde{u}_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{a}^{x+ct} \tilde{U}_0(s)\,ds - \int_{a}^{x-ct} \tilde{U}_0(s)\,ds\right]$$



Η λύση μου μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x-ct) - \frac{1}{c}V(x-ct)\right] + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x+ct) + \frac{1}{c}V(x+ct)\right]}_{u_L(x,t)}$$

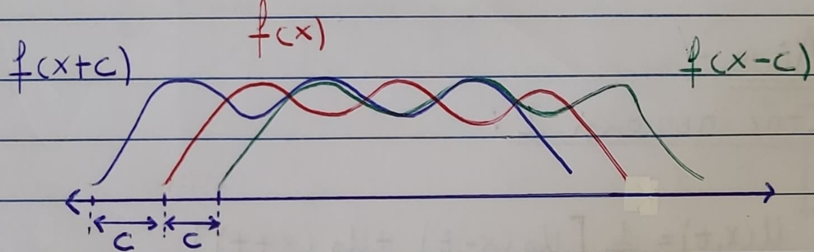
$u(x,t) = u_R(x,t) + u_L(x,t)$

- Όταν έχω μια $f(x)$ και υπολογίζω μετά την $f(x-c)$ η εικόνα της συνάρτησης, μετατοπίζεται προς τα δεξιά (αν $c>0$). Ενώ αν είχα $f(x+c)$ αυτό που θα γινόταν, είναι να είχα μετατόπιση προς την αντίθετη φορά

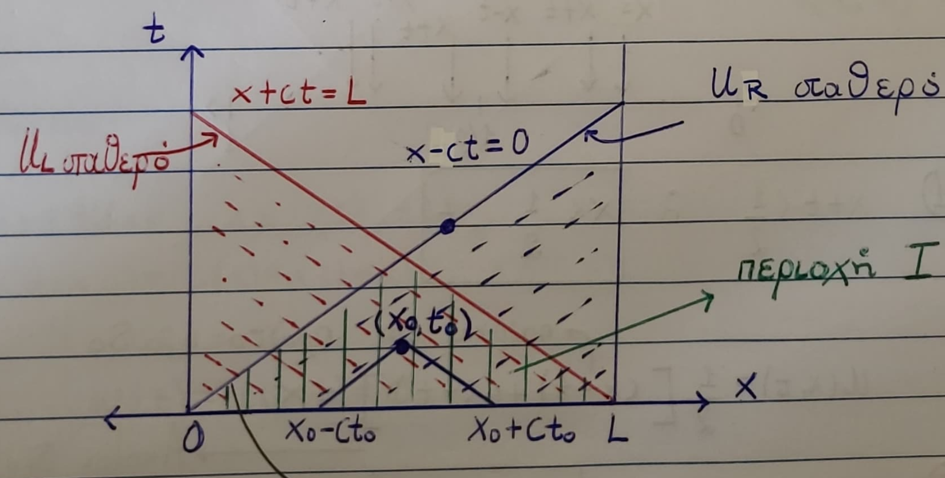
- Το $u_R(x,t)$ εκφράζει μετατόπιση προς τα δεξιά ενώ το $u_L(x,t)$ προς τα αριστερά. Οπότε:

→ $u_R(x,t)$: διάδοση προς τα δεξιά με ταχύτητα c

→ $u_L(x,t)$: διάδοση προς τα αριστερά με ταχύτητα c.



- $x - ct = \xi \in \mathbb{R}$
  $x + ct = \eta \in \mathbb{R}$



$(x_0, t_0) \in I$ → πάνω σε αυτή τη χαρακτηριστική δεν θα αλλάξει η τιμή του όρου u_R θα είναι σταθερό.

Όλα τα σημεία πάνω σε εκείνη έχουν την ίδια τιμή ξ

Ομοίως, πάνω στην $x+cL=L$ θα έχω u_L σταθερό.

Οπότε (βγάζω την (~) γιατί βρίσκομαι μέσα στην περιοχή)

$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{2}\left[u_0(x-ct)+u_0(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}U_0(s)\,ds$$

παράδειγμα (Για να μπορώ να ορίσω το $x-ct$, $x+ct$ βάζω (~) (Κάνουμε περιττή επέκταση)

$u_{tt}=u_{xx}$, $x\in(0,1)$, $t>0$

ΑΣ: $u(x,0)=u_0(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1/2] \\ 1-x, & x\in(1/2,1] \end{cases}$

$u_t(x,0)=0$

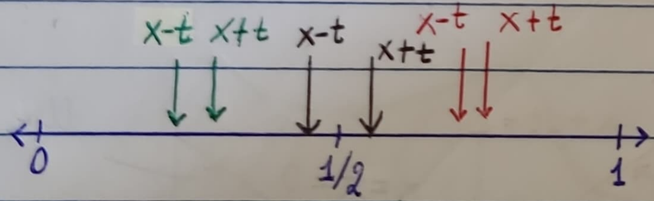
ΣΣ: $u(0,t)=u(L,t)=0$

Λύση:

Στην περιοχή I:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x-t)+u_0(x+t)\right]$$

$x-t<x+t$ (σχετική σχέση που θα έχουν τα $x-t,\frac{1}{2},x+t$



① $x+t<\frac{1}{2}$ ή $\boxed{x<\frac{1}{2}-t}$

παίρνω τον πρώτο κλάδο

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x-t)+(x+t)\right]=x$$

→ Ακόμα δεν θα αλλάξει η συμπεριφορά στην ταχύτητα

② $x-t\geq 1/2$ ή $\boxed{x\geq\frac{1}{2}+t}$

$$u(x,t)= \frac{1}{2}\left[1-(x-t)+1-(x+t)\right] = 1-x$$

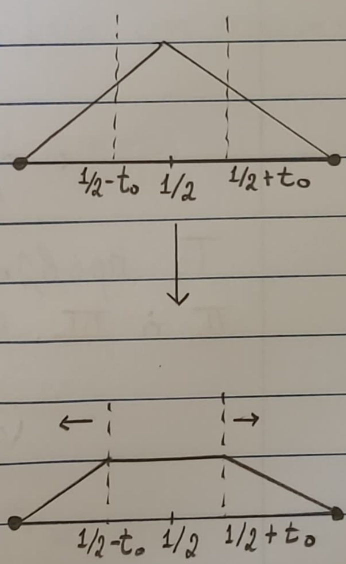
③ $\boxed{\frac{1}{2}-t < x < \frac{1}{2}+t}$

$$u(x,t)= \frac{1}{2}\left[(x-t)+ 1-(x+t)\right] = \frac{1}{2}-t$$

Συνολικά στο I (κανονική περιοχή)

Για $(x,t) \in I$, η λύση είναι

$$u(x,t)= \begin{cases} x &, x \leq \frac{1}{2}-t \\ \frac{1}{2}-t &, x \in \left(\frac{1}{2}-t, \frac{1}{2}+t\right) \\ 1-x &, x \geq \frac{1}{2}+t \end{cases}$$



Παράδειγμα:

$u_{tt} = 4u_{xx} \quad , x \in (0,1), \ t>0$

ΑΣ: $u(x,0)=u_0(x)=x(1-x) \quad , x \in (0,1)$

$u_t(x,0) = 8x$

Σ.Σ: $u(0,t)=u(L,t)=0$

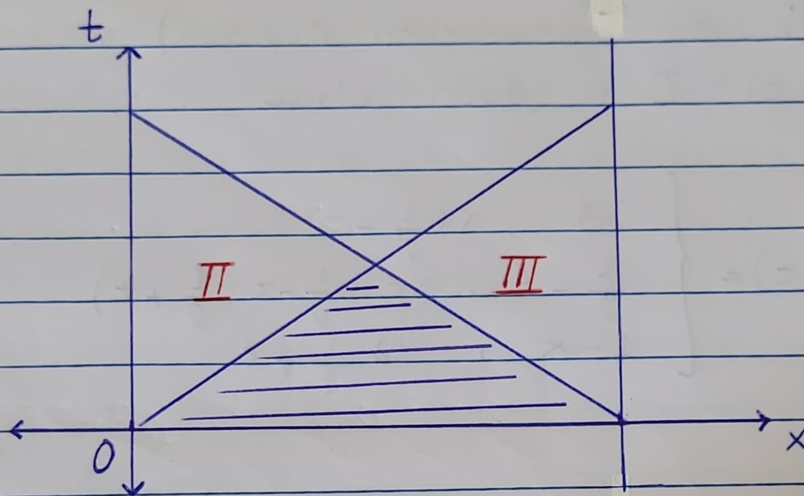
Λύση: (Δεν θα κάνω περιττή επέκταση διότι βρίσκομαι στο $(0,L)$.)

Λύση στο I:

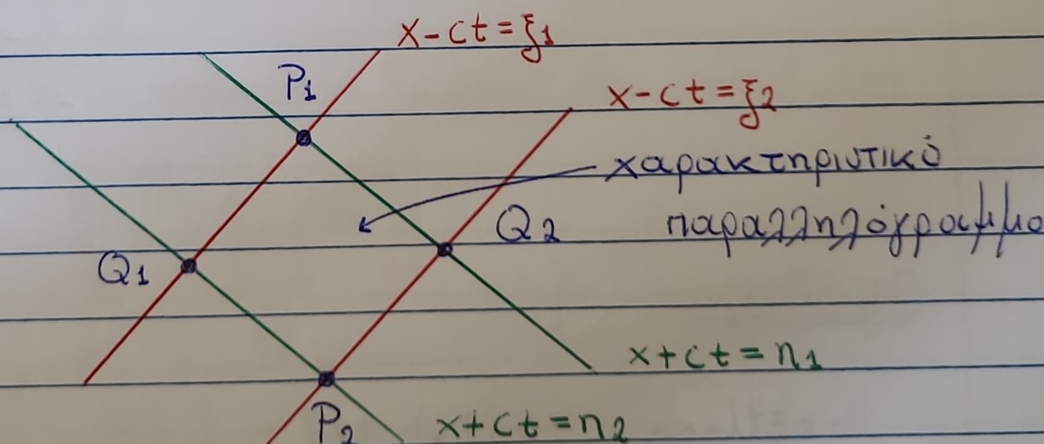
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x-2t)+u_0(x+2t)\right]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 8s\,ds$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big[(x-2t)\left[1-(x-2t)\right]+(x+2t)\left[1-(x+2t)\right]\Big]+(x+2t)^2-(x-2t)^2$$

$$=-4t^2+x-x^2+8tx$$



Το πρόβλημα μας είναι η επέκταση στις περιοχές II ή III.



Θ.ν.δ.ο,

$$u(P_1)+u(P_2)=u(Q_1)+u(Q_2)$$

$$\begin{cases} u_R(P_1)=u_R(Q_1) \\ u_R(P_2)=u_R(Q_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_L(P_1) = u_L(Q_2) \\ u_L(P_2) = u_L(Q_1) \end{cases}$$

Δηλαδή,

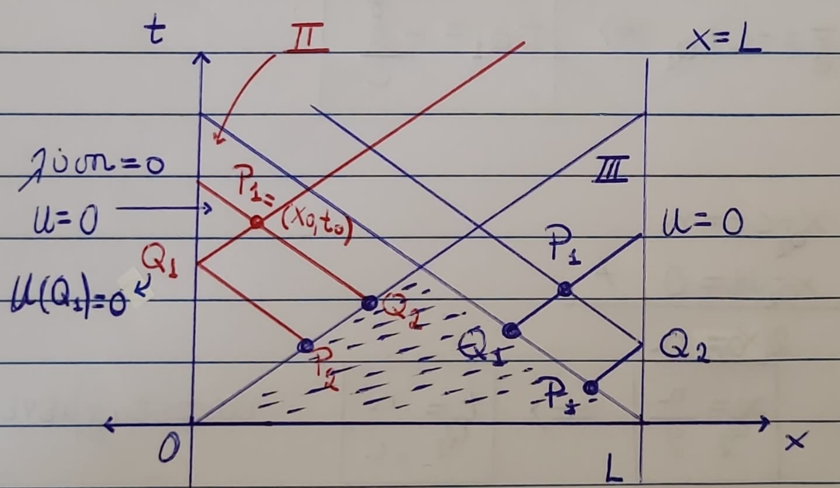
$$u(P_1) + u(P_2) = u(Q_1) + u(Q_2)$$

$$\Rightarrow u_R(P_1) + u_L(P_1) + u_R(P_2) + u_L(P_2)$$

$$= \underbrace{u_R(Q_1)} + \underbrace{u_L(Q_2)} + \underbrace{u_R(Q_2)} + \underbrace{u_L(Q_1)}$$

$$= u(Q_1) + u(Q_2)$$ για κάθε παραλληλόγραμμο.

Αν πάρω τώρα ένα οποιοδήποτε σημείο στη περιοχή II.

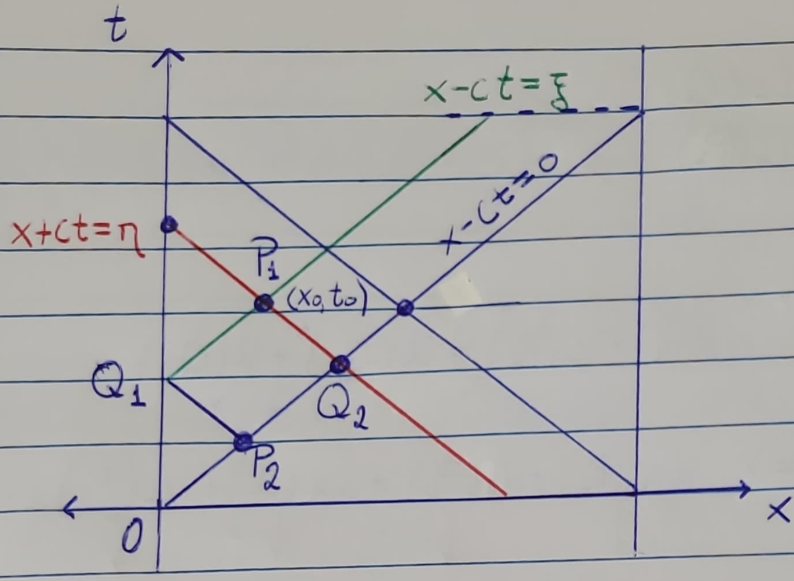


$$\Rightarrow u(P_1) = \boxed{u(x_0, t_0) = u(Q_2) - u(P_2)} \quad (\underline{II})$$

→ Γνωρίζω ότι πάνω στα άκρα $x=0, x=L$ η λύση είναι μηδέν από τις συνοριακές συνθήκες.

→ Μπορώ να βρω τα $u(P_2), u(Q_2)$, αφού ανήκουν στην περιοχή I που ξέρω να υπολογίσω.

$$\Rightarrow u(P_1) = \boxed{u(x_0, t_0) = u(Q_1) - u(P_2)} \quad (\underline{III})$$



$$\xi = x_0 - c t_0$$
$$\eta = x_0 + c t_0$$

Βρίσκω έτσι τα ξ και η και έπειτα τις συντεταγμένες. Δηλαδή,

$\boxed{Q_1}$ $(0, t)$

$$\xi = -c t_{Q_1} \Rightarrow \boxed{t_{Q_1} = -\frac{\xi}{c}}$$

$\boxed{Q_2}$

$$\begin{array}{l} x_{Q_2} + ct = \eta \\ x_{Q_2} - ct = 0 \quad + \\ \hline 2x_{Q_2} = \eta \end{array}$$

$$\boxed{x_{Q_2} = \frac{\eta}{2}} \Rightarrow \boxed{t_{Q_2} = \frac{\eta}{2c}}$$ συντεταγμένες Q_2.

από συντεταγμένες Q_1

$$\left.\begin{array}{l} x + ct = \eta_* \\ x - ct = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_* = -c\frac{\xi}{c} = -\xi$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + ct = -\xi \\ x - ct = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x_{P_2} = -\xi/2} , \boxed{t_{P_2} = -\xi/2c}$$