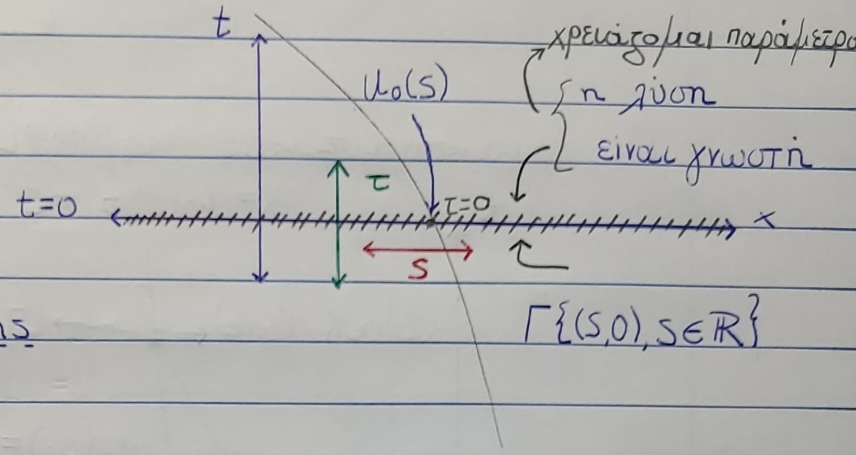
13/02/2023

- $\begin{cases} u_t + u u_x = 0 & , x \in \mathbb{R}, \ t>0 \quad \text{(μη γραμμική εξίσωση)} \\ u(x,0) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$



Αλλαγή Μεταβλητής

$(x,t) \longrightarrow (\tau, s)$

$x = x(\tau, s)$

$t = t(\tau, s)$

$u = u(\tau, s)$

(Θέλω να γράψω την εξίσωση μου ως προς μία μόνο παράγωγο ώστε να πάω σε ΣΔΕ).

$x_\tau = u \quad , \quad x(0,s) = s \to$ είμαι πάνω στην Γ.

$t_\tau = 1 \quad , \quad t(0,s) = 0$

$u_\tau = 0 \quad , \quad u(0,s) = u_0(s)$ (διότι το s μπορεί να μας μεταφέρει πάνω στη Γ).

$\Big(\ u_t + u u_x = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{t_\tau}} u_t + \overset{u}{\overset{\shortparallel}{x_\tau}} u_x$

(κανόνας αλυσίδας) $= u_\tau = 0$.

- $u_\tau(\tau, s) = 0 \Longrightarrow u(\tau, s) = c(s)$ (σταθερά ως προς το τ)

$\xRightarrow{u(0,s)=u_0(s)} \boxed{u(\tau, s) = u_0(s)}$

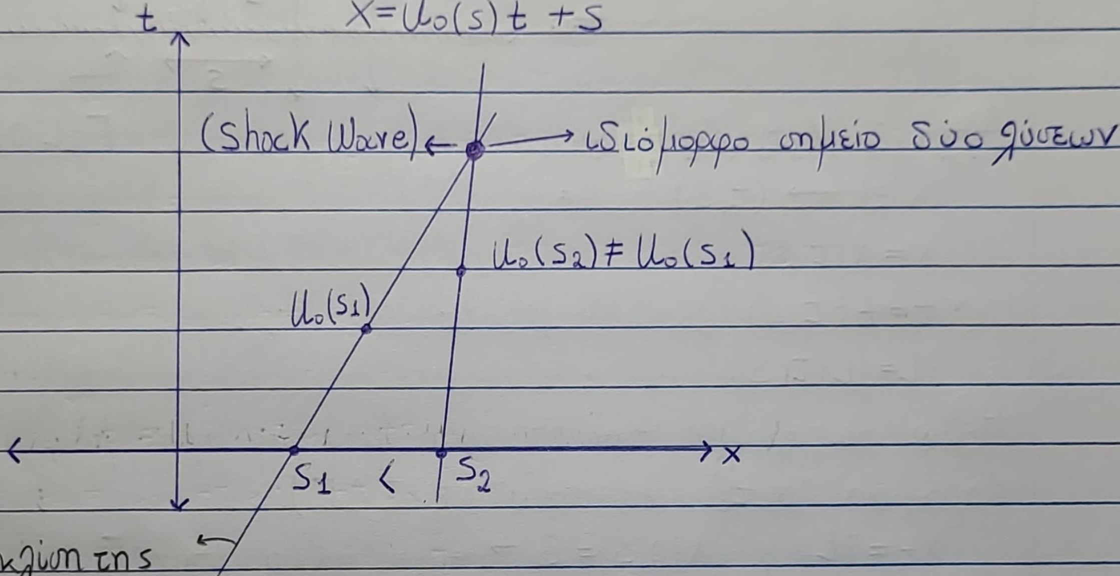
- $t_\tau = 1 \Rightarrow t(\tau, s) = \tau + c(s) \underset{\text{αρχ. συνθ}}{\Longrightarrow} \boxed{t = \tau}$

• $X_\tau(\tau,s) = u(\tau,s) = u_0(s)$, $X(0,s) = s$

$$\Rightarrow X(\tau,s) = u_0(s)\tau + c(s) \underset{\alpha\rho\chi.\ \sigma\upsilon\nu\theta}{\Longrightarrow} \boxed{X(\tau,s) = u_0(s)\tau + s}$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες διέπονται απο:

$x = u_0(s)t + s$



η κλίση της ευθεία καθορίζεται απο την τομή της με τον xx'

$$\left.\begin{aligned} u_t + u u_x &= 0 \\ (u^2)_x &= 2 u u_x \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \boxed{u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0}$$

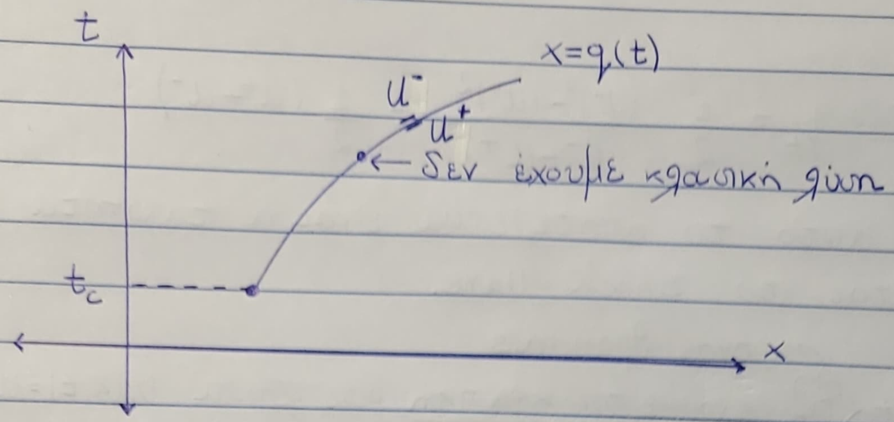
δεν έχουν τις ίδιες λύσεις.

$$\Rightarrow \int_a^b u_t(\xi,t)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_a^b (u^2(\xi,t))_x\,d\xi = 0$$

ως προς τη χωρική μεταβλητή

$$\Rightarrow I(t) = \int_a^b u_t(\xi,t)\,d\xi + \frac{1}{2}\left(u^2(b,t) - u^2(a,t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_a^b u(\xi,t)\,d\xi\right) + \frac{1}{2}\left(u^2(b,t) - u^2(a,t)\right) = 0$$



$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(\xi,t)\,d\xi = \frac{d}{dt}\int_a^{q(t)} u(\xi,t)\,d\xi + \frac{d}{dt}\int_{q(t)}^{b} u(\xi,t)\,d\xi$$

Υπενθύμιση:

VIP!

$$\left(\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{b(t)} u(\xi,t)\,d\xi = b'(t)\,u(b(t),t) - \alpha'(t)\,u(a(t),t) + \int_{a(t)}^{b(t)} (u(\xi,t))_t\,d\xi \right)$$

$$\ldots = q_t \underbrace{u(q(t),t)}_{u^-} + \int_\alpha^{q(t)} u_t(\xi,t)\,d\xi - q_t \underbrace{u(q(t),t)}_{u^+} + \int_{q(t)}^{b} u_t(\xi,t)\,d\xi =$$

(είχα $u_t + u u_x = 0$ ή $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$)

$$= q_t(u^- - u^+) - \frac{1}{2}\int_\alpha^{q(t)} (u^2)_x\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{q(t)}^{b} (u^2)_x\,d\xi$$

$$= q_t(u^- - u^+) - \frac{1}{2}u^2(q^-(t),t) + \frac{1}{2}u^2(\alpha,t) - \frac{1}{2}u^2(b,t) + \frac{1}{2}u^2(q^+(t),t)$$

Οπότε, τελικά με τις απλοποιήσεις θα πάρω:

$$q_t(u^- - u^+) = \frac{1}{2}\left((u^-)^2 - (u^+)^2\right)$$

(Διαιρώ) $\Longrightarrow \quad q_t = \frac{1}{2}\,\frac{(u^-)^2-(u^+)^2}{u^- - u^+} = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$

όπου αυτό το αποτέλεσμα είναι η ταχύτητα που διαδίδεται το Shock Wave.

για $\underbrace{t<t_c}_{\text{χρόνος θραύσης}}$, έχουμε την κλασική μας λύση $u(x,t)=u_0(s)$

(λύνει την εξίσωση όχι την ολοκληρωτική!)

$\left\{\begin{array}{l} x = t u_0(s) + s \\ u = u_0(s) \end{array}\right\} \Rightarrow s = x - tu$

- Ποιος είναι ο χρόνος θραύσης t_c;

$\Rightarrow u(x,t) = u_0(x-tu)$

$\downarrow$

$u_x(x,t) = u_0'(x-tu)(x-tu)_x$

$u_x = u_0'(x-tu)\cdot(1-tu_x)$

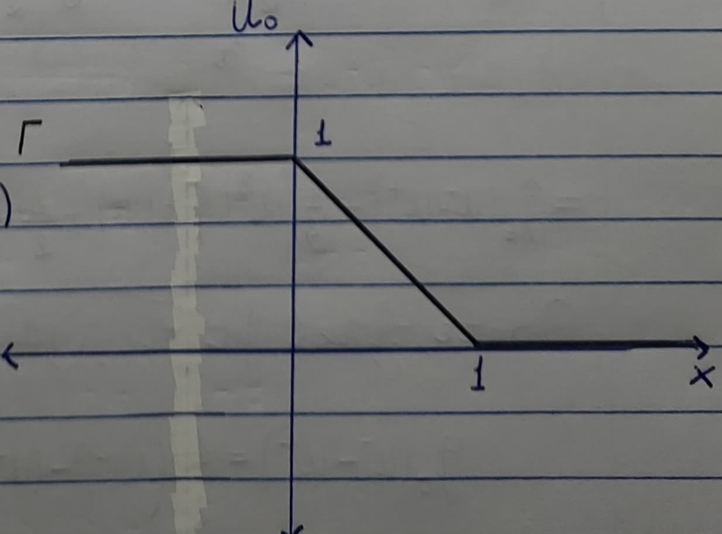
$\Rightarrow \boxed{u_x = \frac{u_0'(\overbrace{x-tu}^{s})}{1+t u_0'(\underbrace{x-tu}_{s})}} \rightarrow \boxed{t_c = -\frac{1}{u_0'(s)}}$

Μετά το $t<t_c$ έχω την ~~λεγόμενη~~ ασθενή λύση.

__Παράδειγμα:__

$u_t + u u_x = 0$

$u(x,0) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & , x\leq 0 \\ 1-x, & x\in(0,1) \\ 0 & , x\geq 1 \end{array}\right.$



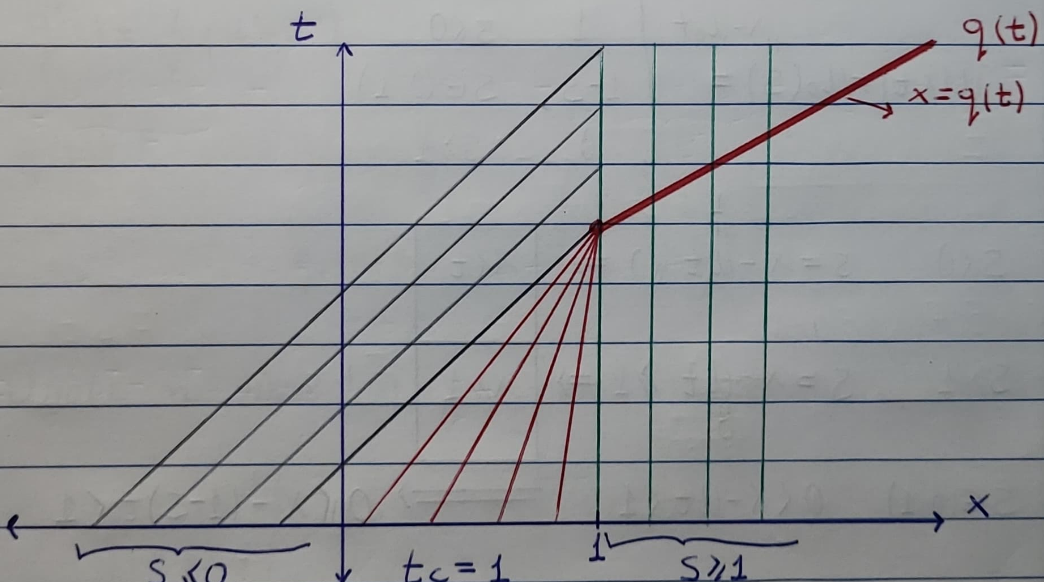
Οι χαρακτηριστικές δίνονται από : $\boxed{x = t\,u_0(s) + s}$

$$u(x,t) = u_0(s) = \begin{cases} 1 & , \quad s \leq 0 \\ 1-s & , \quad s \in (0,1) \\ 0 & , \quad s \geq 1 \end{cases}$$

- $s \leq 0 \Rightarrow u_0(s) = 1$, $\tau = t$ ουσιαστικά
  $X(\tau, s) = t + s$, $s \leq 0$

- $s \geq 1 \Rightarrow u_0(s) = 0$
  $x = s \leftarrow$ χαρακτηριστική

- $s \in (0,1) \Rightarrow u_0(s) = 1 - s$
  χαρακτηριστική $\rightarrow$ $x = t(1-s) + s \Rightarrow \boxed{t = \dfrac{x - s}{1 - s}}$



για $t < 1 = t_c$

$$u(x,t) = u_0(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 0 \\ 1-s, & s \in (0,1) \\ 0, & s \geq 1 \end{cases}$$