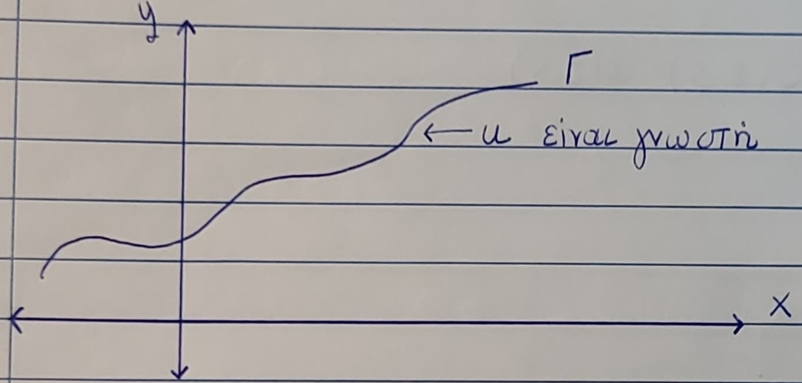
08/02/2023

Εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης με 2 ελεύθερες μεταβλητές:

$F(x,y,u,u_x,u_y)=0$

Αρχικές Συνθήκες:



$\Gamma := \{(x,y)\}$ στην οποία η $u(x,y)$ είναι γνωστή.

$\Gamma := \{(x(s),y(s)),\ s\in I\}$, $I=(a,b)$ ή $I=(a,+\infty)$ ή $I=\overbrace{(-\infty,+\infty)}^{\mathbb{R}}$

ή $I=(-\infty,b)$.

$u(x,y) \xlongequal{(x,y)\in\Gamma} u_0(s)$ (το s διασχίζει την πορεία της καμπύλης)

$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u \quad (*)$

$u(x,y)$ είναι γνωστή στη Γ. (δηλ. μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με μια παράμετρο την s).

Βήματα:

① Παραμετρικοποίηση της αρχικής καμπύλης $\Gamma:\{(x(s),y(s)),\ s\in I\}$.

② Αλλαγή μεταβλητών $(x,y)\longrightarrow(\tau,s)$

Στόχος: Μετατροπή της ΜΔΕ σε ΣΔΕ.

(3) $x = x(\tau, s)$, $x_\tau = a$

$y = y(\tau, s)$, $y_\tau = b$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{u_x x_\tau + u_y y_\tau}_{\text{καν.αλ} = u_\tau} = cu$$

$$\Rightarrow u_\tau(\tau, s) = c(\tau, s) \cdot u(\tau, s)$$

↳ ΣΔΕ

Παράδειγμα:

$u_x + u_y = -u$

$u = \cos x$ στο $y = x^2 + x$, $x > 0$

Λύση:

$\Gamma : \{(s, s^2+s), s > 0\}$ παραμετρικοποίηση της Γ.

$u_0(s) = \cos(s)$

Θέλουμε τ τ.ω $x_\tau = 1$ → ο συντελεστής του u_x.

και $y_\tau = 1$ → ο συντελεστής του u_y.

($\tau = 0$: εκφράζει ότι βρίσκομαι πάνω στην αρχική μου καμπύλη.)

→ Θέλουμε για $\tau = 0$, (τ, s) να ανήκει στην Γ.

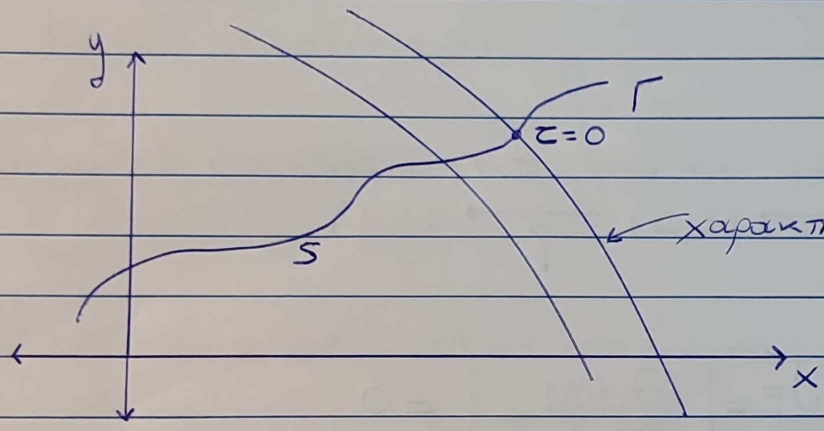
$x(0, s) = s$

$y(0, s) = s^2 + s$

$$x = \tau + c \xrightarrow{x(0,s)=s} \boxed{x = \tau + s} \quad (1)$$

$$y = \tau + d \xrightarrow{y(0,s)=s^2+s} \boxed{y = \tau + s^2 + s} \quad (2)$$

ζεύγος συντεταγμένων που δημιουργεί καμπύλη.



s := κίνηση πάνω στη Γ (αρχική καμπύλη)

τ := κίνηση πάνω στη χαρακτηριστική καμπύλη $(\tau+s,\ \tau+s^2+s)$.

Το ΠΑΤ έχει την μορφή: $\begin{cases} u_\tau = -u \\ u(0,s) = \cos(s) \end{cases}$

$$\frac{u_\tau}{u} = -1 \Rightarrow \log u = -\tau + c \Rightarrow u(\tau,s) = c \cdot e^{-\tau}$$

$$u(0,s)=\cos(s) \Longrightarrow u(\tau,s) = \cos(s) e^{-\tau}, \quad s>0$$

Τώρα θα γυρίσω πίσω στα x και y.

$$\xrightarrow{(1),(2)} y = x + s^2 \Rightarrow s = \sqrt{y-x}, \quad y \geq x.$$

Τώρα υπολογίζω το τ.

$$\tau = x - s = x - \sqrt{y-x} \qquad , y \geq x$$

Υπάρχει λύση για $y \geq x$.

$$u(x,y) = \cos(\sqrt{y-x}) \cdot e^{-x+\sqrt{y-x}}$$

Ερώτημα:

Μπορώ πάντα να έχω τον αντίστροφο μετασχηματισμό;

$$(x,y) \longrightarrow (\tau, s) \xrightarrow[?]{} (x,y)$$

Θέλουμε,

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\tau,s)} \right|_{\Gamma} \neq 0$$

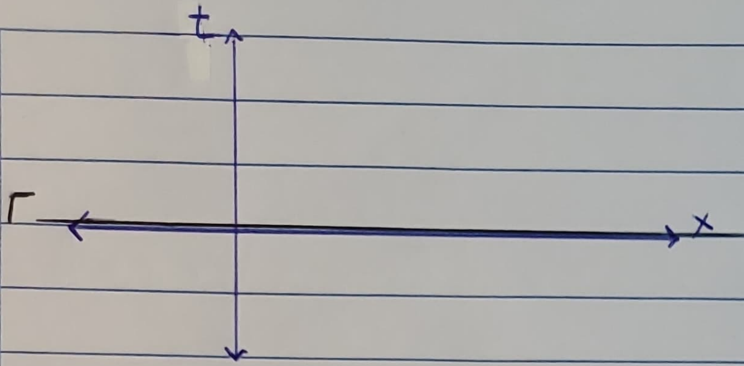
$$J = \begin{vmatrix} x_\tau & x_s \\ y_\tau & y_s \end{vmatrix} = (x_\tau y_s - y_\tau x_s)_{(0,s)}$$

στο παράδειγμα,

$$\left.\begin{aligned} x_\tau(0,s) &= 1 \\ x_s(0,s) &= 1 \\ y_\tau(0,s) &= 1 \\ y_s(0,s) &= 2s+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow J = |2s+1-1| = 2s > 0 \neq 0$$

Παράδειγμα: ($t \to$ χρονική μεταβλητή)

$$u_t + x u_x = u \quad , t > 0$$
$$u(x,0) = x^2$$



$\Gamma := \{(s,0),\ s \in \mathbb{R}\}$

Θέλουμε $(x,t) \to (\tau, s)$

$$(1) \begin{cases} x_\tau = x & , \ x(0,s) = s \\ t_\tau = 1 & , \ t(0,s) = 0 \end{cases}$$

Η εξίσωση έχει πλέον τη μορφή:

$$(2) \begin{cases} u_\tau = u \\ u(0,s) = s^2 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x(\tau,s) = c \cdot e^{\tau} \xrightarrow{x(0,s)=s} x(\tau,s) = s \cdot e^{\tau}$$

$$t(\tau,s) = c + \tau \xrightarrow[t(0,s)=0]{} t = \tau$$

$$(2) \Rightarrow u(\tau,s) = c e^{\tau} \xrightarrow{u(0,s)=s^2} u(\tau,s) = s^2 e^{\tau}$$

$$(1) \Rightarrow x = s \cdot e^{\tau},\ t = \tau \Rightarrow \boxed{s = x \cdot e^{-t}}$$

$$(\tau, s) \longrightarrow (x,t)$$

Η λύση μου είναι:

$$u(x,t) = x^2 e^{-2t} \cdot e^{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = x^2 e^{-t}}$$

Παράδειγμα:

$$u_t + u_x = xu$$
$$u(x,0) = 1$$

Λύση:

χαρακτηριστική εξίσωση

- $\frac{dx(t)}{dt} = 1 \Rightarrow \int dx(t) = \int 1\, dt$

$$x(t) = t + c_1$$

για $t=0 \Rightarrow x(0) = c_1 = x_0$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = t + x_0} \Rightarrow x_0 = x - t$$

κατα μήκος της χαρακτηριστικής

- $\frac{du(t)}{dt} = x \cdot u$

πρώτα θα μετατρέψω το x σε x_0

$$\Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = (t + x_0)\cdot u$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u} du = \int (t + x_0)\, dt$$

$$\Rightarrow \ln u = \frac{t^2}{2} + t \cdot x_0 + c_2$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{\frac{t^2}{2} + t x_0 + c_2}$$

$\Rightarrow$ για $t=0 \Rightarrow u(0) = e^{c_2} = 1$ απο αρχική συνθήκη.

$$c_2 = 0$$

Αρα,

$$u(t) = e^{t \cdot x_0 + \frac{t^2}{2}} \Rightarrow u(t) = e^{t(x-t) + \frac{t^2}{2}} = e^{xt - \frac{t^2}{2}}$$

$$\boxed{u(t) = e^{xt - \frac{t^2}{2}}}$$