06/03/23

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

αρχική ταχύτητα

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x,0) = U_0(x) \quad , \quad x \in (0,L)$$

αρχική θέση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left(b_n \cos \lambda_n t + b_n^* \sin \lambda_n t\right) \quad , \quad \lambda_n = c \cdot \frac{n\pi}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n^* = \frac{2}{cn\pi L}\int_0^L U_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

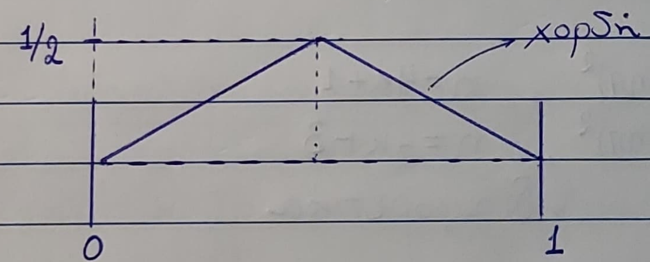
<u>Παράδειγμα:</u>

$u_{tt} = u_{xx}$, $x \in (0,1)$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ συνοριακές συνθήκες

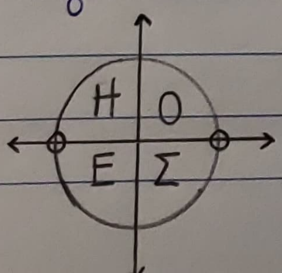
μορφή χορδής $t=0$ $\leftarrow$ $u(x,0) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1/2) \\ 1-x, & x \in [1/2, 1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $u_t(x,0) = 0$ αρχική ταχύτητα

(Θέλω να βρω την έκφραση της λύσης, Το b_n^* θα φύγει, θα μηδενιστεί, διότι δεν έχω αρχική συνθήκη)



$$b_n = 2\cdot\int_0^{1/2} x\cdot\sin(n\pi x)dx + 2\cdot\int_{1/2}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)dx = -\frac{1}{n\pi}\cdot\int_0^{1/2} x(\cos(n\pi x))'dx$$



$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{n\pi}\int_0^{1/2}\cos(n\pi x)dx$$

(για $n=4k$) $$= -\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{(n\pi)^2}\int_0^{1/2}(\sin(n\pi x))'\,dx$$

(για $n=4k+2$) $$= -\frac{1}{n\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \to \begin{cases} 1/2 & , n=4k+1 \\ -1/2 & , n=4k+3 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Συνεισφορά αρτίων:

$$\begin{cases} -1/2n\pi & , n=4k \\ 1/2n\pi & , n=4k+2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Συνεισφορά περιττών:

$$+\begin{cases} 1/2(n\pi)^2 & , n=4k+1 \\ -1/2(n\pi)^2 & , n=4k+3 \\ 0 & , \text{διαφορετικα} \end{cases}$$

και οι δυο συνεισφορές αφορούν τον όρο $\left(-\frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)$.

- Διατηρώ το αρχικό μου προβλημα και δοκιμάζω

$$u(x,t) = f(x \pm ct)$$
$$u_t = \pm c f'(x \pm ct) \qquad [\pm c \cdot \pm c]$$
$$u_{tt} = c^2 f''(x \pm ct)$$
$$u_x = f'(x \pm ct), \quad u_{xx} = f''(x \pm ct)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Longrightarrow c^2 f''(x \pm ct) = c^2 f''(x \pm ct)$$

Οπότε ορίζω,

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & , \ x \in (0, L) \\ -u_0(-x) & , \ x \in (-L, 0) \\ u_0(x+2L), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

έτσι κάνω την $\tilde{u}_0(x)$ περιττή και $2L$-περιοδική

Ομοίως, κάνω και για την αρχική ταχύτητα.

$\Rightarrow \tilde{U}_0$: περιττή + $2L$-περιοδική

Δοκιμάζω,

περιττές επεκτάσεις και στα δύο

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x-ct) + \tilde{u}_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{U}_0(s)\, ds$$

αυτό ικανοποιεί την $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, χωρίς όμως τις αρχικές συνθ.

Θέλω να μπορώ να παραγωγίζω ολοκληρώματα της μορφής:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{a(x_1,x_2)}^{b(x_1,x_2)} f(s)\, ds = \frac{\partial b}{\partial x_j} \cdot f(b) - \frac{\partial a}{\partial x_j} f(a)}$$

VIP!

Ορίζω, $I := \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{U}_0(s)\, ds$

Οπότε,

(1) • $\frac{\partial I}{\partial t} = c\,\tilde{U}_0(x+ct) - c\,\tilde{U}_0(x-ct)$

(2) • $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c^2\,\tilde{U}_0'(x+ct) - c^2\,\tilde{U}_0'(x-ct)$

(3) • $\frac{\partial I}{\partial x} = \tilde{U}_0(x+ct) - \tilde{U}_0(x-ct)$

(4) • $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \tilde{U}_0'(x+ct) - \tilde{U}'(x-ct)$

Αν αντικαταστήσω τα (2) και (4) στην αρχική μου εξίσωση, επαληθεύεται.
Άρα, ικανοποιείται η εξίσωση. Οπότε το $u(x,t)$ ικανοποιεί την αρχική εξίσωση, χωρίς όμως τις αρχικές συνθήκες.
Τώρα, θα εξετάσουμε με τις <u>αρχικές συνθήκες</u> αν ικανοποιείται.

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0(x) + \tilde{u}_0(x)\right) + \frac{1}{2c}\cancel{\int_x^x \tilde{U}_0(s)\,ds}$$

$$= \tilde{u}_0(x)$$
$$= u_0(x) \quad , x \in (0,L)$$

Άρα ικανοποιεί την αρχική θέση.
Τώρα θα δω αν ικανοποιεί την αρχική ταχύτητα.
Οπότε,

$$\Rightarrow u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left(-c\tilde{u}_0'(x-ct) + c\tilde{u}_0(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-c\tilde{u}_0'(x-ct) + c\tilde{u}_0(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(c\tilde{U}_0(x+ct) + c\tilde{U}_0(x-ct)\right)$$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = \frac{1}{2}\left(c\tilde{u}'(x) + c\tilde{u}'(x)\right) + \frac{1}{2c}\left(c\tilde{U}_0(x) + c\tilde{U}_0(x)\right)$$

$$= \tilde{U}_0(x)$$

(απο ορισμό) $= U_0(x) \quad , x \in (0,L)$

Οπότε έχω τελειώσει με τις αρχικές συνθήκες ικανοποιούντε.

Τώρα θα δώ τις <u>συνοριακές συνθήκες</u>.

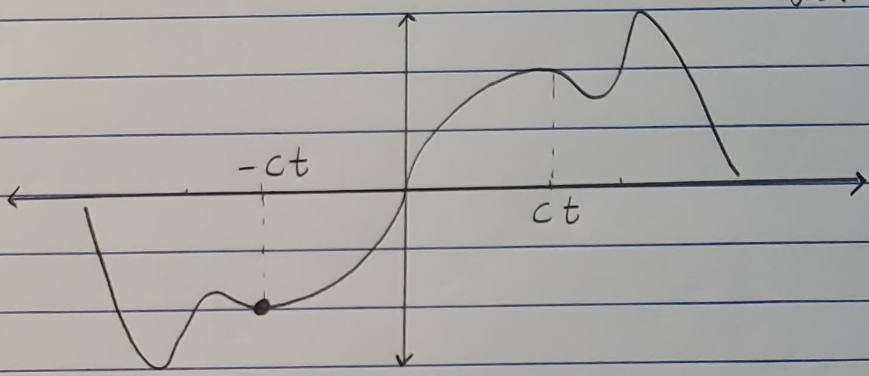
Οπότε,

(η λύση στο αριστερό άκρο πρέπει να είναι μηδέν (διότι τα άκρα είναι ακλόνητα). ←

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cancelto{0}{\tilde{u}_0(-ct)} + \cancelto{0}{\tilde{u}_0(ct)}}_{\text{διότι έχω άθροισμα (περιττών ⇒ ομοίων)}}\Big) + \frac{1}{2c}\cancelto{0}{\int_{-ct}^{ct} \tilde{U}_0(s)\,ds}$$

($\tilde{u}_0, \tilde{U}_0$ περιττές συναρτήσεις)

$\tilde{u}_0(-ct) = -\tilde{u}_0(ct)$



$$u(L,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{u}_0(L-ct) + \tilde{u}_0(L+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{L-ct}^{L+ct} \tilde{U}_0(s)\,ds$$

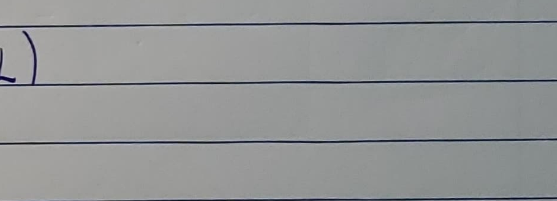
(2L-περιοδική)

$$\tilde{u}_0(L-ct) \overset{\downarrow}{=} \tilde{u}_0(L-ct-2L)$$
$$= \tilde{u}_0(-L-ct)$$
$$= -\tilde{u}_0(L+ct)$$

Για το ολ/μα:

(μετακινήθηκα μισή-περίοδο, άν του ότι έχω περιττή + 2L-περιοδική)

$$\int_{L-ct}^{L+ct} \tilde{U}_0(s)\,ds = \int_{-ct}^{ct} \tilde{U}_0(s+L)\,ds$$



1) αλλαγή μεταβλητής

2) ολ/μα συμμετρικό γύρω από το μηδέν.

Αυτή είναι η λεγόμενη, Λύση D'Allembert.