06/02/2023

Ορισμός:

Μια εξίσωση ΜΔΕ είναι μια εξίσωση της μορφής:

$$F(\underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots, x_d}_{\text{ανεξάρτητες}}, u(x_1, \dots, x_d), \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}}_{u_{x_1}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_d}}_{u_{x_d}}, \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}_{u_{x_1 x_1}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}}_{u_{x_1 x_2}}, \dots) = 0$$

Συμβολισμοί:

Έστω $f(x_1, \dots, x_d)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ ή } f_{x_j} \text{ ή } \partial_{x_j} f \quad (\text{ισοδύναμα}) \quad \doteq (\text{ορισμός})$$

Κανόνας Αλυσίδας:

$f(x_1, \dots, x_d)$, $x_j = x_j(\underbrace{\tau_1, \dots, \tau_m}_{\text{τυχαίο βήμα}})$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \tau_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \tau_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d} \cdot \frac{\partial x_d}{\partial \tau_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \tau_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

Παράδειγμα:

$f(x_1, x_2)$ → ελεύθερη μεταβλητή

$x_1 = x_1(\tau) = \tau$

$x_2 = x_2(\tau) = e^{\tau}$ μερική παράγωγος της x_2 ως προς τ.

$$\partial_\tau f = \partial_{x_1} f \underbrace{\partial_\tau x_1}_{=1} + \partial_{x_2} f \underbrace{\partial_\tau x_2}_{=e^{\tau}}$$

$$= \underbrace{\partial_{x_1} f}_{f_{x_1}} + \underbrace{x_2}_{e^{\tau}} \underbrace{\partial_{x_2} f}_{f_{x_2}}$$

• ο ορισμός της κατα κατεύθυνση παραγώγου θα μετράει πραγματικά μόνο τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς την απόσταση επί μιας ευθείας κατα μία δεδομένη κατεύθυνση αν το $\vec{v}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Κατα κατεύθυνση παράγωγος:

$\vec{v} = \underset{\sim}{v}$

$f(x,y)$ ρυθμός μεταβολής

διάνυσμα $\underset{\sim}{v}$

$$D_{\underset{\sim}{v}} f \doteq \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}} = \nabla f \cdot \underset{\sim}{v}.$$

όπου $\nabla = (\partial x, \partial y)^T$

Αν η $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε όλες οι κατα κατεύθυνση παράγωγοι υπάρχουν. Η κατα κατεύθυνση παράγωγος στο $\vec{x}$ κατα την κατεύθυνση του $\vec{v}$ δίνεται απο την

$$Df(\vec{x})\vec{v} = \text{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\right) v_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\right) v_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\right) v_3$$

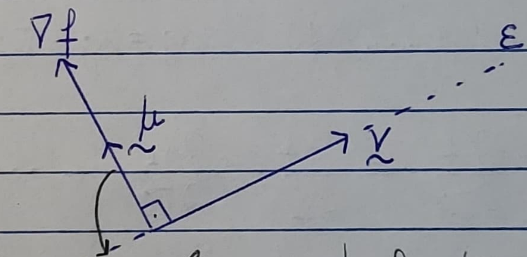
όπου $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Περίπτωση:

$D_{\underset{\sim}{v}} f = 0$ (δηλ. δεν υπάρχει καμία μεταβολή πάνω στην ευθεία που ορίζει το διάνυσμα)

$\Downarrow$

f σταθερή στη διεύθυνση του $\underset{\sim}{v}$.



$\varepsilon: \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{\mu} = 0$

αν βρω το $\underset{\sim}{\mu}$ θα μπορώ να εκφράσω την εξίσωση της ευθείας.

$\nabla f = 0 \Rightarrow f$ σταθερή (ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδέν)

Τάξη (order) ΜΔΕ:

Είναι η τάξη της παραγώγου μεγαλύτερου βαθμού.

π.χ

$u_{xx} + u_y + u_{xy} = 0$ (τάξη 2)

ή

$u_x + u_y + u_{xy} = 0$ (τάξη 2)

Γραμμικότητα:

Μια ΜΔΕ είναι γραμμική, εάν είναι γραμμική απεικόνιση ως προς τις μερικές παραγώγους.

Π.χ

- $u_x + u_y + x u_x = 0$ (γραμμικότητα ως προς τις μερικές παραγώγους)
- $u_x + u_y + x^2 u_x = 0$ (γραμμική)
- $u_x + u_x u_y = 0$ (μη γραμμική)
- $u_x + u u_y = 0$ (μη γραμμική)
- $u_x + (u_y)^2 = 0$ (μη γραμμική)

Σχεδόν Γραμμικές (Quasi-Linear):

- Μη γραμμική
- Οι μεγίστης τάξης παράγωγοι, να είναι γραμμικές.

γραμμική η μεγαλύτερη τάξεως παράγωγος.

Π.χ $\underbrace{u u_x}_{\text{μη γραμμική}} + u_{yy} = 0$

Παράδειγμα:

χωρίς συνοριακές συνθήκες έχει άπειρες λύσεις η εξίσωση αυτή.

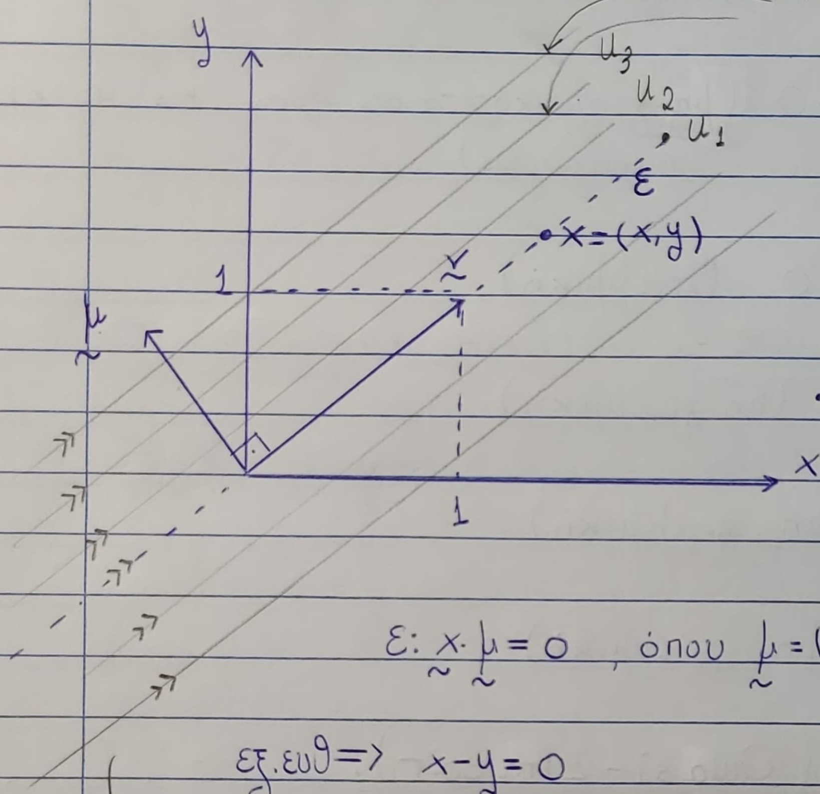
εξίσωση μεταφοράς $u_x + u_y = 0$, $u = u(x,y)$

Λύση:

$(u_x, u_y) = \nabla u$

$\nabla u \cdot \underset{\sim}{v} = 0$, όπου $\underset{\sim}{v} = (1,1)^T$ transpose

χαρακτηριστικές γραμμές/ευθείες.



ο ρυθμός μεταβολής της u κατα την κατεύθυνση του $\underset{\sim}{v}$.

- $\nabla u \cdot \underset{\sim}{v} = 0$
- $\underset{\sim}{v} = (1,1)^T$

$\varepsilon: \underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{\mu} = 0$, όπου $\underset{\sim}{\mu} = (1,-1)$ και $\underset{\sim}{v} = (1,1)$

εξ. ευθ $\Rightarrow$ $x - y = 0$

$x - y = \xi$ εξ. ευθ.

$u(x,y) \doteq f(\xi)$

$u(x,y) = u(\xi) \Longleftrightarrow \nabla u \cdot \underset{\sim}{v} = 0$

$\Longleftrightarrow u_x + u_y = 0$

<u>Παράδειγμα:</u>

1) $u(x,y) = e^{x-y} \Rightarrow u(\xi) = e^{\xi}$, $\xi = x - y$

2) $u(x,y) = \sin(y - x)$

Γενική Περίπτωση:

$$a u_x + b u_y = 0$$

Θεωρώ $\nabla u \cdot \underset{\sim}{v} = 0$, όπου $\underset{\sim}{v} = (a, b)$

και κάθετο του το $\underset{\sim}{\mu} = (b, -a)$

$\Rightarrow \underset{\sim}{\mu} \cdot \underset{\sim}{v} = 0$

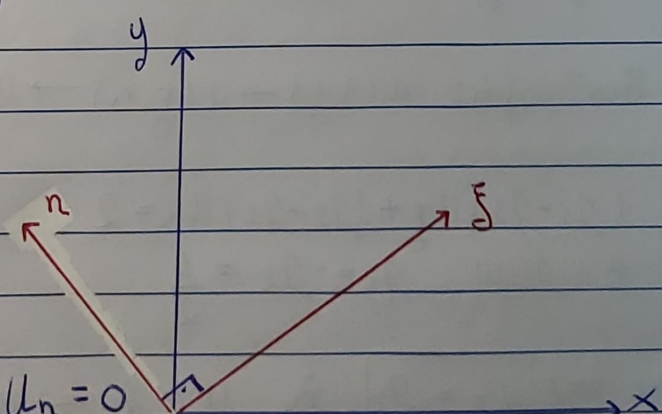
$\Rightarrow bx - ay = 0$ (και μετά θα μετατοπίσω το ελεύθερο διάνυσμα)

και έτσι θα έχω λύσεις της μορφής:

$$u(x,y) = u(\xi), \quad \xi = bx - ay.$$

• Έστω $a u_x + b u_y = 0$. $\quad a, b \neq 0$
Θα στρέψω το σύστημα αξόνων.
Δηλαδή,

$$\xi = \lambda_1 x + \lambda_2 y$$
$$\eta = \lambda_2 x - \lambda_1 y$$



$$u_x = u_\xi \overbrace{\xi_x}^{\lambda_1} + u_\eta \overbrace{\eta_x}^{\lambda_2}$$
$$u_y = u_\xi \underbrace{\xi_y}_{\lambda_2} + u_\eta \underbrace{\eta_y}_{-\lambda_1}$$

$$(a\lambda_1 + b\lambda_2) u_\xi + \underbrace{(a\lambda_2 - b\lambda_1)}_{=0} u_\eta = 0 \; *$$

$\hookrightarrow a\lambda_2 = b\lambda_1$

ΜΔΕ $\rightarrow$ ΣΔΕ

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{a}{b}\lambda_2}$

* εγώ το επέλεξα να το μηδενίσω, για να γίνει ΣΔΕ. Μπορώ να επιλέξω οτιδήποτε για λ_1, λ_2 π.χ. μπορώ να μηδενίσω τον άλλο συντελεστή του όρου u_ξ.

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{b}+b\right)\lambda_2 u_\xi = 0$$

οπότε μια επιλογή για το λ_2 είναι: $\lambda_2 = \left(\frac{a^2}{b}+b\right)^{-1}$
Έτσι η Δ.Ε θα έχει τη μορφή: $u_\xi = 0$

$$\Rightarrow u(\xi) = C$$

για $\xi = \lambda_1 x + \lambda_2 y$

$$\lambda_1 = \frac{a}{b}\lambda_2$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{a^2}{b}+b\right)^{-1}$$

Παράδειγμα:

$u_x - u_y = 2$ (μη ομογενής)

$\xi = \lambda_1 x + \lambda_2 y$
$n = \lambda_2 x - \lambda_1 y$

$u_x = u_\xi \lambda_1 + u_n \lambda_2$
$u_y = u_\xi \lambda_2 - u_n \lambda_1$

επιλέγω να μην έχω το n

διαδρομή: $u(x,y) \to u(\xi, n) \to u(\xi)$

$(\lambda_1 - \lambda_2) u_\xi + (\lambda_2 + \lambda_1) u_n = 2$
Επιλέγω $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{u_\xi = 2}$ ή $u' = 2 \Rightarrow u(\xi) = 2\xi + C$

$u(\xi) \longrightarrow \boxed{u(x,y) = x - y + C}$ λύση