03/05/23

πηγές σε μη-ομογενείς εξισώσεις σε μία διάσταση.

- <u>Θερμότητας:</u>

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

και ψάχνω την $u(x,t)$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}$.

- <u>Κυματικής:</u>

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , x \in \mathbb{R}$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = v_0(x)$$

και ψάχνω την $u(x,t)$.

Σε πεπερασμένο χωρίο είχαμε:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , x \in [0,L]$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = v_0(x)$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Όπου η λύση ήταν της μορφής:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}_0(x-ct) + \tilde{u}_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{U}_0(s)ds$$

Τώρα όμως δοκιμάζουμε την συνάρτηση στην ομογενή κυματική:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} U_0(s)ds$$

για $t=0$:

$$u(x,0) = u_0(x)$$

και παραγωγίζοντας έχω:

$$u_t(x,0) = U_0(x)$$

Εξίσωση Θερμότητας:

- Η αρχική μας μελέτη θα ξεκινήσει με την εξίσωση Θερμότητας. (χωρίς την πηγή)

Είχαμε πει ότι

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad , x \in \mathbb{R} \quad , t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$g(x,t) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2t}} \quad \text{(πυρήνας)}$$

Λύση: (χρήσιμη και βοηθητική)

$$u(x,t) = g(x,t) * u_0(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - x\,t)\, u_0(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t)\, u_0(x-\xi)\, d\xi$$

Τώρα θα λύσω το ίδιο πρόβλημα με πηγή αλλά με μηδενική αρχική συνθήκη:

1º Βήμα:

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$
$$u(x,0) = 0$$

Αυτό μπορώ να το κάνω (την απλοποίηση), διότι αν ξέρω την λύση της
$$\begin{cases} u'_t = c^2 u'_{xx} \\ u'(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$
τότε το άθροισμα τους θα μου δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

$$w = u + u'$$
$$w(x,0) = \cancel{u(x,0)}^{\,0} + u'(x,0) = u_0(x)$$
$$w_t = u_t + u'_t = c^2 u_{xx} + f + c^2 u'_{xx}$$
$$= c^2 (u + u')_{xx} + f$$
$$= c^2 w_{xx} + f.$$

Προταση:

Αν $u(x) = \int_a^x f(x,s)\,ds$ τότε, $\frac{d}{dx} u(x) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,s)\,ds$ $a \in \mathbb{R}$

Απόδειξη:

Ορίζω αρχικά,

$$(1) \quad \Phi(x,y) = \int_{\alpha}^{y} f(x,s)\,ds \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

Θέλω να βρω το $\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)$.

Οπότε,

- $$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = \cancelto{1}{\frac{\partial y}{\partial y}} f(x,y) - \cancelto{0}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} f(x,\alpha) = f(x,y)$$

- $$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = \int_{\alpha}^{y} \frac{\partial}{\partial x} f(x,s)\,dx$$

Θέτω $y = y(x)$.

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) \overset{\text{καν. αλ.}}{=\!=} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cancelto{1}{\frac{dx}{dx}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Οπότε έχουμε δείξει ότι:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) = \int_{\alpha}^{y} \frac{\partial}{\partial x} f(x,s)\,ds + f(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

Αν πάρω τώρα $y = x$ τότε

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) = \int_{\alpha}^{x} \frac{\partial}{\partial x} f(x,s)\,ds + f(x,x) \overset{(1)}{\underset{x=y}{=}} \frac{d}{dx} U(x)$$

Οπότε έχοντας αυτην την πρόταση θέλω να λύσω το εξής πρόβλημα:

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , x\in\mathbb{R} \, , t>0.$$
$$u(x,0)=0.$$

Λύση:

$$\Phi_t = c^2 \Phi_{xx} \quad : \Phi(x,t;\tau)$$
$$\Phi(x,0;\tau) = f(x,\tau) \quad (\tau : \text{παραμετρος}) \ \forall \ \tau>0 \quad (u_0(x))$$

Θα δούμε πως ορίζουμε μια οικογένεια δ.ε όπου για κάθε τ παίρνω άλλη τιμή.

Αναπαράσταση Duhamel:

$$u(x,t) = \int_0^t \Phi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau$$

τότε u είναι λύση της $u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t)$
$u(x,0)=0.$

Οπότε,
$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \overbrace{\Phi(x,t-\tau;\tau)}^{g(x,t;\tau)}\, d\tau$$

απο πρόταση $\Rightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t g(x,t,\tau)\,d\tau = g(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow u_t = \Phi(x,0;t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$$

$$= f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau$$

ενώ η χωρική είναι:

$$u_{xx} = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau.$$

Αν $u_t - c^2 u_{xx}$ θέλω να δείξω ότι ισούται με $f(x,t)$.
Οπότε,

$$u_t - c^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \underbrace{\left(\Phi_t(x, t-\tau; \tau) - c^2 \Phi_{xx}(x, t-\tau; \tau)\right)}_{=0 \ \forall \tau.} d\tau$$

$$\Rightarrow u_t - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

Επομένως,

$$\Phi_t = c^2 \Phi_{xx}$$
$$\Phi(x, 0; \tau) = f(x,\tau) \qquad (u_0(x))$$

η λύση είναι: $\Phi(x,t,\tau) = g(x,t) * f(x,\tau) \quad \forall \tau > 0.$
Εγώ όμως θέλω:

$$\Phi(x, t-\tau; \tau) = g(x, t-\tau) * f(x,\tau)$$

Οπότε,

$$u(x,t) = \int_0^t g(x, t-\tau) * f(x,\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t-\tau)\, f(x-\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

και αυτο είναι η λύση της εξίσωση:

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , x \in \mathbb{R} , t > 0$$
$$u(x,0) = 0.$$

Όμως εγώ θέλω τη λύση της γενικής περίπτωσης:

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Αυτό θα συμβεί αν προσθέσω τις λύσεις.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + f \\ u(x,0) = 0 \end{cases} + \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Οπότε, η λύση η τελική της γενικής μορφής είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, t-\tau)\, f(x-\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \tau)\, u_0(x-\xi)\, d\xi.$$

Εξίσωση Κυματικής:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , x \in \mathbb{R} , t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = U_0(x)$$

Πάλι θα το σπάσουμε σε περιπτώσεις.
Άρα θα ξεκινήσω λύνοντας το πρόβλημα:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

Πριν όμως θα λύσω το πρόβλημα:

$$\Phi_{tt} = c^2 \Phi_{xx} \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0$$
$$\Phi(x,0;\tau) = 0$$
$$\Phi_t(x,0,\tau) = f(x,\tau)$$

Αναπαράσταση Duhamel:

$$u(x,t) = \int_0^t \Phi(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$$

Οπότε,

- $u_t = \cancelto{0}{\Phi(x,0;t)} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$

- $u_{tt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,0;t)}_{\text{πηγή: } f(x,t)} + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$

- $u_{xx} = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x,t-\tau;\tau)\,d\tau$

Έτσι έχω,

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)+\int_0^t\left[\phi_{tt}(x,t-\tau;\tau)-c^2\phi_{xx}(x,t-\tau;\tau)\right]d\tau$$

$$\Rightarrow u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)$$

Τώρα μένει να βρω τη λύση για κάθε τ του προβλήματος πιο πάνω. (Αντί να χρησιμοποιήσω F^{-1} θα κάνω χρήση του τύπου D'Allebert)

$$\phi(x,t;\tau)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}f(s,\tau)\,ds$$

Θα έχω χρονική μετατόπιση:

$$\phi(x,t-\tau;\tau)=\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

Όπου είναι και η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t) \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

Καταλήγοντας η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , x \in \mathbb{R} \ , t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u_t(x,0) = U_0(x)$$

είναι το άθροισμα των πιο πάνω λύσεων.
Άρα έχω ότι:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} U_0(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$u_{tt} = u_{xx} + xt$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

<u>Λύση:</u>

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} s\tau \, ds\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} s \, ds\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \tau \cdot \left(\frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \tau\left[(x+t-\tau)^2-(x-t+\tau)^2\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \tau\left(\cancel{x^2}+\cancel{t^2}+\cancel{\tau^2}+2xt-2x\tau\cancel{-2t\tau}-\cancel{x^2}-\cancel{t^2}-\cancel{\tau^2}+2xt\cancel{+2\tau t}-2x\tau\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \tau(4xt-4x\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t 4x\tau t-4x\tau^2\,d\tau$$

$$= xt\cdot\frac{\tau^2}{2}\Bigg|_0^t - x\cdot\frac{\tau^3}{3}\Bigg|_0^t$$

$$= xt\cdot\frac{t^2}{2} - x\cdot\frac{t^3}{3}$$

$$= x\left(\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}\right)$$

$$= x\cdot\frac{t^3}{6}.$$