

Αριθμητική Ανάλυση – 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@aegean.gr)

Άσκηση 1

Συνολικά πόσους αριθμούς μπορεί να αναπαραστήσει ένα υπολογιστικό σύστημα στο $\mathbb{F}(2, 8, -15, 16)$;

Άσκηση 2

Για ένα υπολογιστικό σύστημα με $\mathbb{F}(2, 5, -3, 4)$, υπολογίστε τον μικρότερο αριθμό ο οποίος είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Δείξτε αναλυτικά τη διαδικασία υπολογισμού.

Άσκηση 3

Δείξτε ότι η απεικόνιση $\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$ αποτελεί νόρμα του \mathbb{R}^n .

Άσκηση 4

Δεδομένου του αριθμητικού συστήματος $\mathbb{F}(10, 4, -7, 9)$ εκτιμήστε τη λύση του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Αφού υπολογίσετε τη λύση, επαναλάβετε τη διαδικασία για το σύστημα με εναλλαγή των γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το σφάλμα ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

Άσκηση 5

Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω στο \mathbb{R} και $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ μια νόρμα του V . Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in V$ ισχύει $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Άσκηση 6

Έστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ τυχαίο διάνυσμα του \mathbb{R}^n . Εξετάστε αν η απεικόνιση $\sum_{j=1}^n j |x_j|$ αποτελεί νόρμα του \mathbb{R}^n .

Άσκηση 7

Έστω ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^n$ με μη μηδενικά στοιχεία. Εξετάστε αν η απεικόνιση $|y^T x|$, η οποία αντιστοιχίζει κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα πραγματικό αριθμό, αποτελεί νόρμα του \mathbb{R}^n . Δικαιολογήστε την απάντησή σας αναλύοντας τις ιδιότητες που πρέπει να πληροί μια νόρμα.

Άσκηση 8

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα του \mathbb{R}^n . Εξετάστε αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\|x\| \neq \|y\| \Leftrightarrow x \neq y$$