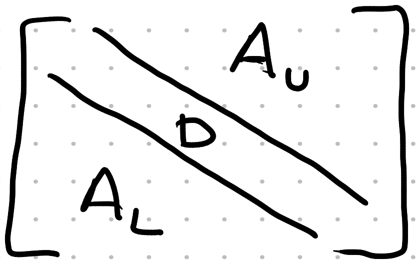
Διάλεξη 9: Μέθοδος Jacobi

$A = M - N$, $M = D$ $N = D - A$

Μέθοδος Gauss-Seidel.

$A =$ 

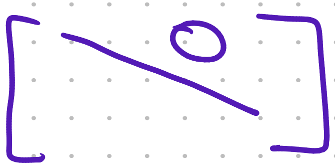
$, D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$A_U = \{a_{ij}, j > i\}$

$A_L = \{a_{ij}, j < i\}$

$$A = \overbrace{D + A_L}^{M} - \overbrace{(-A_U)}^{N}$$

$\exists M^{-1}$?

$M =$ 

$$x^{(k)} = G x^{(k-1)} + M^{-1} b \quad , \quad G = M^{-1} N \quad , \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

ή

$$M x^{(k)} = \underbrace{N x^{(k-1)} + b}_{\in \mathbb{R}^n}$$

, στο βήμα k το $x^{(k-1)}$ είναι γνωστό άρα το $N x^{(k-1)} + b$ είναι γνωστό.

$$A\cancel{x}=b \Rightarrow Mx^{(k)} = c^{(k-1)} \quad \text{για} \quad k \geq 1.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{(k-1)} \\ c_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ c_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} x_1^{(k)} = c_1^{(k-1)} \Rightarrow x_1^{(k)} = \frac{c_1^{(k-1)}}{a_{11}}$$

$$a_{21} x_1^{(k)} + a_{22} \underline{x_2^{(k)}} = c_2^{(k-1)}$$

$$\vdots$$

στο n-οστο βήμα $\quad x_n^{(k)}$

$x^{(0)} \longrightarrow x^{(1)} \rightarrow \cdots \longrightarrow x^{(m)}$. $\quad m$ φορές την παραπάνω διαδικασία.

Πχ. $m \approx 10$

Εύρεση ιδιοτιμών Πίνακα

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \iff$ εύρεση ριζών ενός πολυωνύμου βαθμού n

Θεώρημα (Abel): Δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό ριζών πολυωνύμων βαθμών μεγαλ. ή ίσου από 5.

$\lambda^{(0)}$ τυχαία.
$v^{(0)}$

$A : \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} : |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$\lambda^{(0)} \to \lambda^{(1)} \to \dots, \to \lambda^{(n)}$

$v^{(0)} \to v^{(1)} \to \dots \to v^{(n)}$

Ευχόμαστε $\lambda^{(n)} \to \lambda_1$, $V^{(n)} \to V_1$

Έστω $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο.

$$v^{(1)} = \frac{Av^{(0)}}{\|Av^{(0)}\|_2}$$

$\|\alpha x\|$

$$\|v^{(1)}\|_2 = ; \quad \left\| \frac{Av^{(0)}}{\|Av^{(0)}\|_2} \right\|_2 = \frac{1}{\|Av^{(0)}\|_2} \|Av^{(0)}\|_2 = 1$$

$$v^{(k)} = \frac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|_2} = \frac{A\frac{Av^{(k-2)}}{\|Av^{(k-2)}\|}}{\left\|A\frac{Av^{(k-2)}}{\|Av^{(k-2)}\|}\right\|} = \frac{A^2v^{(k-2)}}{\|A^2v^{(k-2)}\|_2} = \dots = \frac{A^kv^{(0)}}{\|A^kv^{(0)}\|}$$

Μέθοδος των δυνάμεων.

$$\lambda^{(k)} = \frac{(v^{(k)})^T A v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|_2} = (v^{(k)})^T A v^{(k)}$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τ.ω $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

και $v^{(0)}$ τ.ω $(v^{(0)})^T v_1 = (v^{(0)}, v_1) \neq 0$

Τότε $v^{(k)} \to v_1$ και $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$

<u>Απόδειξη:</u> για την περίπτωση που ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$V = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad A = V\Lambda V^{-1}$$

(Πχ. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad V = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \atop \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

Τα διανύσματα $\{v_1, \dots, v_n\}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$

$$v^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \qquad (v^{(0)}, v_1) \neq 0 \quad \text{ή} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i, v_1\right) \neq 0$$

$$\text{ή} \quad \sum_{i=1}^{n} (\beta_i v_i, v_1) \neq 0$$

(γνωρίζουμε $(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$)

$$\text{ή} \quad \beta_1 \underbrace{(v_1, v_1)}_{\|v_1\|_2^2} \neq 0 \Rightarrow \beta_1 \neq 0$$

$$v^{(k)} = \frac{A^k v^{(0)}}{\|A^k v^{(0)}\|_2} = \frac{A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i}{\|A^k \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i A^k v_i}{\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i A^k v_i\|_2} = *$$

$$\left(\lambda_1 \qquad A v_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow A^2 v_1 = \lambda_1 A v_1 = \lambda_1^2 v_1 \Rightarrow A^k v_1 = \lambda_1^k v_1 \right.$$

$$\left. \sigma(A^k) = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\} \right)$$

$$* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^k v_i}{\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^k v_i\|_2} = \frac{\beta_1 \lambda_1^k}{|\beta_1| |\lambda_1|^k} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i}{\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i\|_2} = \alpha \frac{v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i}{\|v_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i\|_2}$$

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

$$\alpha = 1 \text{ ó } -1$$

$$\xrightarrow{k \to +\infty} \alpha \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$$

Αν v_1 είναι ιδιοδ. τότε $-v_1$ είναι ιδιοδ.

$Av_1 = \lambda v_1 \Rightarrow A(-v_1) = \lambda(-v_1) \Rightarrow A v_1^* = \lambda v_1^*$, v_1^* είναι ιδιοδ.

$$\lambda^{(k)} = \frac{(v^{(k)}, Av^{(k)})}{(v^{(k)}, v^{(k)})} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{(v_1, Av_1)}{(v_1, v_1)} = \frac{(v_1, \lambda_1 v_1)}{(v_1, v_1)} = \frac{\lambda_1 (v_1, v_1)}{(v_1, v_1)} = \lambda_1$$

Άσκηση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε αριθμητικά κάνοντας 3 επαναλήψεις το λ_1 και v_1