- Διάλεξη 8 -

$Ax=b$, $A=M-N$, $\exists M^{-1}$

$x^{(0)}$ τυχαίο

$$x^{(k)} = G x^{(k-1)} + M^{-1} b$$

Έχουμε σύγκλιση στην λύση αν $\rho(G)<1$

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$$

Γνωρίζουμε ότι $\rho(G) \le \|G\|$

Ικανή συνθήκη $\exists \|\cdot\|$ τ.ω. $\|G\|<1$

$\|x^{(k)} - x^*\| = ? \le$

<u>Πρόταση</u>: Εάν $\rho(G)<1$ τότε $(I-G)^{-1} = \overset{G^0}{\overset{\shortparallel}{I}} + G^1 + G^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} G^j$

$$\left(\frac{1}{1-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \quad \text{όταν} \quad |\lambda|<1 \right)$$

$$x^{(k)} = M^{-1} N x^{(k-1)} + M^{-1} b \quad \text{ή} \quad \boxed{M x^{(k)} = N x^{(k-1)} + b} \; *$$

$$A = M - N \overset{*M^{-1}}{\Rightarrow} \boxed{M^{-1} A = I - G}$$

$$* \Rightarrow M x^{(k)} \underline{- M x^{(k-1)}} = N x^{(k-1)} \underline{- M x^{(k-1)}} + b$$

$$M\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right) = \underbrace{(N - M)}_{-A} x^{(k-1)} + b \overset{*M^{-1}}{\Rightarrow} x^{(k)} - x^{(k-1)} = -M^{-1} A x^{(k-1)} + M^{-1} b \Rightarrow$$

$\boxed{Ax^* = b}$ αφού x^* λύση του προβλήματος

$$\Rightarrow x^{(k)} - x^{(k-1)} = -(I - G) x^{(k-1)} + M^{-1} b = -(I - G) x^{(k-1)} + \underbrace{M^{-1} A}_{(I-G)} x^*$$

$$\Rightarrow x^{(k)} - x^{(k-1)} = (I - G)\left(x^* - x^{(k-1)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I - G)^{-1}\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right) = x^* - x^{(k-1)}$$

Έστω $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ φυσική νόρμα που παράγεται από την $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x^{(k-1)} - x^*\| \le \|(I-G)^{-1}\| \, \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| = \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} G^j\Big\| \, \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \|G^j\| \, \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|G\|^j \, \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\|A^2\| = \|A \cdot A\| \le \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2 \quad \ldots \quad \|A^j\| \le \|A\|^j$$

Εαν βρω $\|\cdot\|$ τ.ω $\|G\| < 1$ τοτε

$$\|x^{(k-1)} - x^*\| \le \frac{1}{1-\|G\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| = \|G(x^{(k-1)} - x^*)\| \le \|G\| \, \|x^{(k-1)} - x^*\| \le \frac{\|G\|}{1-\|G\|} \|x^{(k)} - x^*\|$$

$$\left(\begin{aligned} x^{(k)} &= G x^{(k-1)} + M^{-1} b \\ x^* &= G x^* + M^{-1} b \end{aligned} \right)$$

$$\boxed{\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|G\|}{1-\|G\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}$$

Για δοσμένο $\varepsilon>0$ επίπεδο σφάλματος.

$$\|x^{(k)}-x^*\| \leq \varepsilon$$

αρκεί $\dfrac{\|G\|}{1-\|G\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon \Rightarrow \boxed{\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| \leq \dfrac{1-\|G\|}{\|G\|}\varepsilon}$

ε^*

Μεθοδος Jacobi

$$D = \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn})$$

$$A = D + (A-D) = \overset{M}{\overset{\parallel}{D}} - \overbrace{(D-A)}^{N}$$

$$G = D^{-1}(D-A)$$

$$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_{11}}, \frac{1}{\alpha_{22}}, \dots, \frac{1}{\alpha_{nn}}\right)$$

$$(D-A)_{ij} = \begin{cases} -\alpha_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i=j \end{cases}$$

$$G_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ & \ddots & \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Πρόταση</u>: Αν ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο (κατά γραμμές) τότε η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (ικανή συνθήκη για σύγκλιση του Jacobi)

A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο αν $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, \dots, n$

<u>Πχ</u>:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 6 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 4 \end{array}$$

Παράδειγμα

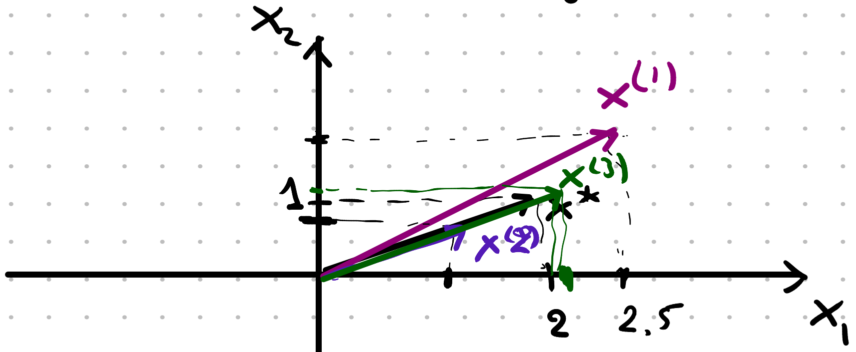
$$Ax=b \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ακριβής λύση είναι $x^*=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)}=M^{-1}b=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$



$$\|G\|_\infty=\frac{1}{2}$$

$$\|x^{(1)}-x^*\|_\infty \le \frac{1/2}{1-1/2}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = 5/2$$

$$x^{(2)}=\overset{G}{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}\overset{x^{(1)}}{\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}}+\overset{M^{-1}b}{\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -5/6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(2)} - x^*\|_\infty \le 1 \cdot \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -5/3 \\ -5/6 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 5/3$$

$$x^{(3)} = \overset{G}{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}} \overset{x^{(2)}}{\begin{bmatrix} 5/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}} + \overset{M^{-1}b}{\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -5/12 \\ -5/18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/12 \\ 20/18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/12 \\ 10/9 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(3)} - x^*\|_\infty \le 1 \cdot \|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 25/12 - 5/6 \\ 10/9 - 5/6 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 15/12 \\ 5/18 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 15/12$$