Διάλεξη 7

όχι μαθήματα 8, 13, 15 Νοεμβρίου

→ Νόρμες διανυσμάτων.

→ Νόρμες πινάκων — φυσικές νόρμες $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$Ax = b$

Τελικά λύνουμε το $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$

Έχουμε $\Delta x \approx 0$

$$\cancel{Ax} + A(\Delta x) + (\Delta A)x + (\Delta A)(\Delta x) = \cancel{b} + \Delta b$$

$$A(\Delta x) = -(\Delta A)x - (\Delta A)(\Delta x) + \Delta b$$

$\exists A^{-1}$

$$\underbrace{\Delta x}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{-A^{-1}(\Delta A)x - A^{-1}(\Delta A)(\Delta x) + A^{-1}\Delta b}_{\in \mathbb{R}}$$

Έστω $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια νόρμα.

$$\|\Delta x\| \le \underbrace{\|A^{-1}(\Delta A)x\|}_{\le \|A^{-1}\|\|(\Delta A)x\|} + \underbrace{\|A^{-1}(\Delta A)(\Delta x)\|}_{\le \|A^{-1}(\Delta A)\|\,\|\Delta x\|} + \overbrace{\|A^{-1}\Delta b\|}^{\le \|A^{-1}\|\|\Delta b\|}$$

$$(1 - \|A^{-1}(\Delta A)\|)\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\,\|(\Delta A)x\| + \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\| = \|A^{-1}\|\left(\|(\Delta A)x\| + \|\Delta b\|\right)$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(\Delta A)\|}\left(\|\Delta A\|\,\|x\| + \|\Delta b\|\right)$$

$$\left(\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \sim \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Διαιρώ με $\|x\|$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(\Delta A)\|}\left(\|\Delta A\| + \frac{\|\Delta b\|}{\|x\|}\right) =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1 - \|A^{-1}(\Delta A)\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|x\|}\right) \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1 - \underbrace{\|A^{-1}(\Delta A)\|}_{\ll 1}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$$\left(Ax=b \Rightarrow \|Ax\| = \|b\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\|\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|b\|} \geq \frac{1}{\|A\|\|x\|} \right)$$

Ορίζουμε ως $k(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ τον δείκτη κατάστασης του πίνακα A.

→ A είναι καλής κατάστασης αν $k(A) \approx 1$ ή κοντά στο 1.

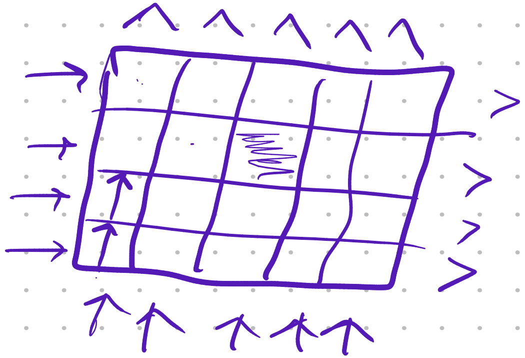
→ A είναι κακής κατάστασης αν $k(A) \gg 1$

Θ.ν.δ.ο $\underline{k(A) \geq 1}$ για όλες τις φυσικές νόρμες.

$$A^{-1}A = I \Rightarrow \|A^{-1}A\| = \|I\| \Rightarrow \|A^{-1}\|\|A\| = k(A) \geq \|I\|$$

$$\|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \lessapprox K(A)\left\{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right\}$$



$\rightarrow \quad \Delta A = \mathbb{O}$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le K(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Παράδειγμα

$\|A\|_1 = \frac{1}{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \qquad K_p(A) = \|A^{-1}\|_p\,\|A\|_p \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 1/2$

$\|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty = 4$

$K_1(A)$, $K_2(A)$, $K_\infty(A) = ?$

$$\|A\|_2 = \left[\rho(A^TA)\right]^{1/2}$$

$$K_1(A) = K_\infty(A) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4} \ ; \ \lambda_2 = \frac{1}{16} \qquad \|A\|_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 16 \ , \ \lambda_2 = 4 \qquad \|A^{-1}\|_2 = (16)^{1/2} = 4$$

$$k_2(A) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1/4 - \lambda & 0 \\ 0 & 1/16 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\left(\tfrac{1}{16} - \lambda\right) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \searrow \lambda_2 = \frac{1}{16} \end{matrix}$$

<u>Ερώτηση</u> : Τι σχέση έχουν οι νόρμες $\|A\|_1$ και $\|A^T\|_\infty$;

$$\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$$

Επαναληπτικές Μέθοδοι για την Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

Έστω $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αρχική εκτίμηση της λύσης

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια επαναληπτική διαδικασία έτσι ώστε στο j-βήμα $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ και $\lim_{j \to \infty} x^{(j)} = x^*$, όπου x^* η λύση του προβλήματος

$x^{(0)} \to x^{(1)} \to x^{(2)} \to \cdots \longrightarrow x^{(j)} \simeq x^*$

Έστω M, N πίνακες στο $\mathbb{R}^{n \times n}$ τ.ω. $\exists M^{-1}$ και $A = M - N$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{M}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} - \underset{N}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$Ax = b \Leftrightarrow (M-N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow \boxed{x = M^{-1}Nx + M^{-1}b}$

□ $G = (M^{-1}N) \Rightarrow x = Gx + M^{-1}b$

Ορίζουμε την γενική επαναληπτική μέθοδο ως εξής

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο διάνυσμα.

$x^{(k)} = G x^{(k-1)} + M^{-1} b \quad , \quad k \geq 1$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $Ax=b$ και M, N με $\exists M^{-1}$ και $A = M - N$, $G = M^{-1}N$

Τότε $x^{(k)} = G x^{(k-1)} + M^{-1}b$ συγκλίνει στη λύση $x^* \in \mathbb{R}^n$

<u>ανν</u> $\rho(G) < 1$.

<u>Απόδειξη</u>:

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)} &= G x^{(k-1)} + M^{-1} b \\ x^* &= G x^* + M^{-1} b \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^{(k)} - x^* = G\left(x^{(k-1)} - x^*\right) =$$

$$= G^2\left(x^{(k-2)} - x^*\right) = \dots$$

$$= \dots = G^k\left(x^{(0)} - x^*\right)$$

Θέλουμε $G^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$ (I)

Εάν G είναι διαγωνοποιήσιμος. $G = V^{-1} \Lambda V \Rightarrow G^k = V^{-1} \Lambda^k V$

$(Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = \lambda A v = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v)$

$G^k \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{O}$ ανν $\Lambda^k \to \mathbb{O} \Leftrightarrow \overbrace{\max_{j\in\{1,\dots,n\}} |\lambda_j|}^{\rho(G)} < 1 \Leftrightarrow \rho(G) < 1$

Πρόταση: $\rho(G) \leq \|G\|$ $\forall$ φυσική νόρμα.

Έστω λ, v ιδ.ιοδ. και ιδιοδιάνυσμα του G

$G v = \lambda v \Rightarrow \|Gv\| = |\lambda| \, \|v\|$
$\|Gv\| \leq \|G\| \, \|v\|$
$\Rightarrow |\lambda| \cancel{\|v\|} \leq \|G\| \cancel{\|v\|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|G\| \geq |\lambda| \Rightarrow \|G\| \geq \max_{\lambda\in\sigma(G)} |\lambda| = \rho(G)$ ✓

Ικανή συνθήκη για σύγκλιση της $x^{(k)} = \underline{G}\, x^{(k-1)} + M^{-1} b$

$\exists \|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ ε.ω $\|\underline{G}\| < 1$