Αριθμητική Ανάλυση - Διάλεξη 6

Νόρμες στον $\mathbb{R}^{n\times n}$: (Κατασκευή νορμών πινάκων από νόρμες διανυσμάτων)

Φυσικές νόρμες: Έστω $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq \mathbb{0}}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|z\|=1}\|Az\| \overset{?}{=} \sup_{\|z\|\le 1}\|Az\|$$

αν $\|z\|<1$ τότε $\|Az\| \le \|A\|\|z\| < \|A\|$

$\exists \sup$ όλες οι νόρμες διαν. είναι ισοδύναμες $\Rightarrow$ $\exists c, C>0$ τ.ω. $c\|x\|_2 \le \|x\| \le C\|x\|_2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

θ.ν.δ.ο. $\exists$ άνω φράγμα: $c\|Ax\|_2 \le \underbrace{\|Ax\| \le C\|Ax\|_2}$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \frac{C\|Ax\|_2}{c\|x\|_2} \le \frac{C}{c}\|A\|_F < \infty$$

είχαμε δ.ο. $\|Ax\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2$

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα $\left(\frac{C}{c}\|A\|_F\right) \Rightarrow \exists \sup$

α) $\|A\|\ge 0$ ✓ $\quad \|A\|=0 \Leftrightarrow A = \mathbb{0}_{n\times n}$ $\left(\sup_{x\neq \mathbb{0}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=0 \Rightarrow \|Ax\|=0 \Rightarrow Ax=\mathbb{0} \Rightarrow A=\mathbb{0} \right)$

b) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|\lambda A x\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\,\|A\|$ ✓

$\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ (e)✓

c) $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\|$

$\Rightarrow \dfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\| \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\| \Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$. ✓

d) $\|(AB)x\| = \|A(\overbrace{Bx}^{y})\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|B\| \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|B\| \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ✓

---

p-νόρμα πίνακα $\quad \|A\|_p = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup\limits_{\|z\|_p=1} \|Az\|_p \quad , p>0$

$\|A\|_1, \quad \|A\|_2, \quad \|A\|_\infty$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \Big| \le \qquad (Ax)_i = \underbrace{\begin{bmatrix} - \; i \text{ row} \; - \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ | \end{bmatrix}}_{x}$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \, |x_j| = \sum_{j=1}^{n} \Big(|x_j| \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|}_{\text{αθροισμα της } j\text{-στηλης του } |A|} \Big) \le$$

$$\begin{array}{c} \quad\ \ j=2 \\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \Big(|x_j| \underbrace{\max_j \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|}_{\substack{\text{μεγιστο αθροισμα απολ. στοιχειων ως προς τις στηλες.} \\ \|A\|_1}} \Big) = \|A\|_1 \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|A\|_1 \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \quad \|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \|x\|_1 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \|A\|_1 \quad \Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \|A\|_1 \quad (*)$$

Πως θα δειξουμε την ισοτητα.

Έστω $x^* = (0, 0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j^*}}{1}, 0, \dots 0)$ οπου $j^* = \operatorname{argmax}_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|$ j^* ο δεικτης της στηλης με το μεγιστο αθροισμα απολ. στοιχειων.

Τότε $\|x^*\|_1 = 1$ $\qquad \|Ax^*\|_1 = \|A\|_1 \Rightarrow \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \geq \frac{\|Ax^*\|_1}{\|x^*\|_1} = \|A\|_1$ (**)

(*) + (**) $\Rightarrow \|A\|_1 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

<u>Άσκηση</u>: Δ.ο $\|A\|_\infty$ είναι το μέγιστο άθροισμα των απολύτων στοιχείων της γραμμής

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A, και $v\in\mathbb{C}^n$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

αν $\quad Av = \lambda v$

$\sigma(A) = \{$το σύνολο των ιδιοτιμών του $A\}$ (φάσμα του A)

$\rightarrow$ A συμμετρικός ($A^T = A$) τότε $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (AB)^T = B^T A^T$

$\rightarrow$ $A^T A$ συμμετρικός $\quad (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ ✓ $\quad \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
$\forall A$

$$0 \leq \|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (Ax)^T Ax = x^T A^T A x = x^T (A^T A x) = (x, A^T A x)$$

$x = v$ το ιδιοδ. που αντιστοιχεί στη ιδιοτιμή λ.

$$(v, A^T A v) = (v, \lambda v) = \lambda \|v\|_2^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} \geq 0.$$

Φασματική Ακτίνα του $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Θα δείξουμε ότι $\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{1/2}$ είναι η φυσική νόρμα που προκύπτει $\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

Εάν έχουμε συμμετρικό πίνακα τότε τα ιδιοδιανύσματά του αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$

για $i=j$ $(v_i, v_i) = \|v\|_2^2$

$A^T A$ είναι συμμετρικός.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

Μπορώ να επιλέξω τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ έτσι ώστε $(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i=j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tw $\quad x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$

$$A^T A x = A^T A \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{(A^T A) v_j}_{\lambda_j v_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v_j$$

$$\|Ax\|_2^2 = (x, A^T A x) =$$

$(v_i, v_j) = \delta_{ij}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\alpha_j|^2 \le \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 = \lambda_1 \|x\|_2^2 = \overbrace{\rho(A^T A)}^{\|A\|_2^2} \|x\|_2^2$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

$$\|x\|_2^2 = (x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$$

$x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \le \|A\|_2^2 \Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \le \|A\|_2$$

Έχουμε $\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq \frac{\|Av_1\|_2^2}{\|v_1\|_2^2} = \frac{(v_1, A^T A v_1)}{\|v_1\|} = \frac{\lambda_1 \|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} = \lambda_1$.

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \|A\|_2$$