Διάλεξη 5

Αν $\exists c, C > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{c|||x||| \leq ||x||}_{②} \underbrace{\leq C|||x|||}_{①} \iff \exists m, M > 0 \text{ τ.ω } m||x|| \leq |||x||| \leq M||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

① $\Rightarrow$ $|||x||| \geq \frac{1}{C}||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $m = \frac{1}{C}$ $\Rightarrow$

② $\Rightarrow$ $|||x||| \leq \frac{1}{c}||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $M = \frac{1}{c}$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \quad p > 0 \quad \text{είναι νόρμα του } \mathbb{R}^n$$

Ν.Δ.Ο $||\cdot||_p$ είναι ισοδύναμη $||\cdot||_\infty$ $\forall p > 0$. $\left(||x||_\infty = \max_j |x_j|\right)$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \max_j |x_j|^p\right)^{1/p} = \overbrace{\max|x_j|}^{||x||_\infty} n^{1/p}$$

αρα $\exists C = n^{1/p}$ τ.ω $||x||_p \leq C||x||_\infty$

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p} = \left(|x_1|^p + \dots + \underbrace{|x_{j^*}|^p}_{||x||_\infty^p} + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p} \geq$$

$\geq \left(||x||_\infty^p\right)^{1/p} = ||x||_\infty$ άρα $c = 1$

$$\Rightarrow \quad ||x||_\infty \leq ||x||_p \leq n^{1/p}||x||_\infty$$

Από τα παραπάνω $\forall p,q>0$ οι νόρμες $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες

αφού $\|\cdot\|_p$ είναι ισοδ. με $\|\cdot\|_\infty$ $\forall p$

Αν $x_k \in \mathbb{R}^n$, $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x \in \mathbb{R}^n \iff x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_q} x \in \mathbb{R}^n$, $p,q>0$.

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_{\cdot} = 0 \iff x_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$$

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b) \qquad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \sim \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Πρέπει να ορίσουμε νόρμες πινάκων. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n\times n}$)

$$\begin{bmatrix} \longleftarrow & r_1 \in \mathbb{R}^n & \longrightarrow \\ \longleftarrow & r_2 & \longrightarrow \\ & \vdots & \\ \longleftarrow & r_n & \longrightarrow \end{bmatrix} \to [r_1 - - r_2 - \cdots - r_n -] \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Ορισμός: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n\times n}$)

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα αν

a) $\|A\| \geq 0$ $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\|A\| = 0 \Rightarrow A = \mathbb{O}_{n\times n}$

b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

c) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

d) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e) $\exists \overbrace{\|\cdot\|_v}^{\text{νόρμα διανύσματος}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τ.ω. $\|Ax\|_v \leq \|A\| \|x\|_v$

νόρμα διαν. νόρμα πίνακα

Για το (e) Θα λέμε ότι $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι συμβατές.

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b) \qquad \frac{\|\Delta x\|_v}{\|x\|_v} \sim \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|_v}{\|b\|_v}$$

$$\|x\|_2 = |(x,x)|^{1/2}$$

$$\|Ax\|_2 = |(Ax, Ax)|^{1/2}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} — r_1 — \\ — r_2 — \\ \vdots \\ — r_n — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1, x) \\ (r_2, x) \\ \vdots \\ (r_n, x) \end{bmatrix} \quad \text{άρα } (Ax)_j = (r_j, x)$$

άρα $\|Ax\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} [(r_j, x)]^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|r_j\|_2^2 \|x\|_2^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|r_j\|_2^2\right)^{1/2} \cdot \|x\|_2$

Είχαμε δ.ο $(x,y) \leq |(x,y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

$$\|r_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \|r_j\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \|r_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2$$

Θα ορίσουμε $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$ νόρμα? Frobenius.

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\|A\|_F$ είναι νόρμα στου $\mathbb{R}^{n\times n}$

α) + b) + c) Ισχύουν αφού είναι σαν νόρμα διανύσματος στου $\mathbb{R}^{n^2}$

d) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

i-γραμμή του A

j-στήλη του B

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = (A_i^r, B_j^c) \leq \|A_i^r\|_2 \|B_j^c\|_2$$

$$\|AB\|_F = \left(\sum_i \sum_j (AB)_{ij}^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_i \sum_j \|A_i^r\|_2^2 \|B_j^c\|_2^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_i \|A_i^r\|_2^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1} \|B_j^c\|_2^2\right)^{1/2} = \|A\|_F \|B\|_F$$

e) ✓

Άρα $\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα, συμβατή $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b) \qquad \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \sim \frac{\|\Delta A\|_F}{\|A\|_F}, \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \|A\|_F = \sqrt{1+1+1+1} = 2$ $\quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \|x\|_2 = \sqrt{5}$

Θα ορίσουμε νόρμες πινάκων ως εξής:

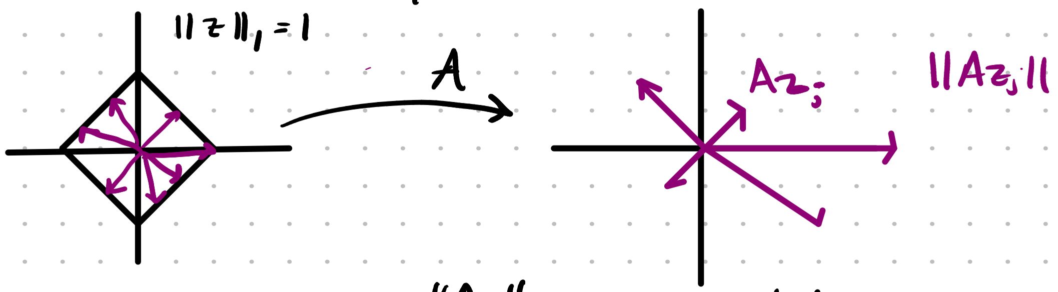
$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \forall x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0$$

$$\lambda Ax = A\lambda x$$

Ισοδύναμα:

$$z = \frac{x}{\|x\|},\quad \|z\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\substack{z\in\mathbb{R}^n \\ \|z\|=1}} \|Az\|$$



άρα $$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|z\|=1} \|Az\|.$$