Αριθμητική Ανάλυση - Διάλεξη 4

Διανυσματικοί Χώροι με νόρμα $(V, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

$V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

α) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\forall x \in V$

γ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$

→ Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα του $\mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$.

Θ.δ.ο $\|x\|_A = \|Ax\|$ είναι νόρμα του $\mathbb{R}^n$.

α) $\|x\|_A = \|Ax\| \geq 0$ αφού $\|\cdot\| \geq 0$

$\|x\|_A = 0 = \|Ax\| \Leftrightarrow Ax = \mathbb{0} \overset{\exists A^{-1}}{\Longleftrightarrow} x = \mathbb{0}$

β) $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \|\lambda x\|_A = \|A(\lambda x)\| = \|\lambda \underbrace{Ax}_{y}\| = |\lambda| \, \|Ax\| = |\lambda| \, \|x\|_A$, $\forall x \in V$

γ) $\|x+y\|_A = \|A(x+y)\| = \|\overset{\tilde{x}}{Ax} + \overset{\tilde{y}}{Ay}\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A \quad \forall x, y \in V$

Νόρμες στον $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

$x = (-1, 3, -5) \in \mathbb{R}^3$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$

$\|x\|_1 = 9$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}$

$\|x\|_2 = \sqrt{35}$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1,2,\dots,n\}} |x_j|$

$\|x\|_\infty = 5$

<u>Γενικά</u> : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$, $p > 0$

<u>Ερώτηση</u> : Ισχύει ότι $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Έστω j^* τ.ω $|x_{j^*}| = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} |x_j|$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_{j^*}|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p} =$$

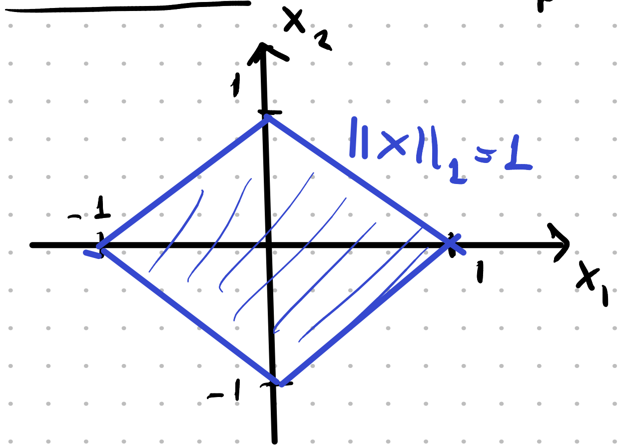
$$= \left[|x_{j^*}|^p\left(\left(\frac{|x_1|}{|x_{j^*}|}\right)^p + \dots + 1 + \dots + \left(\frac{|x_n|}{|x_{j^*}|}\right)^p\right)\right]^{1/p} =$$

$$= |x_{j^*}|\left(q_1^p + q_2^p + \dots + 1 + \dots q_n^p\right)^{1/p} \qquad 0 \le q_j < 1$$

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = |x_{j^*}| \cdot \cancel{\lim_{p\to\infty}}\overset{\to 1}{\sqrt[p]{1}} = |x_{j^*}| = \|x\|_\infty$$

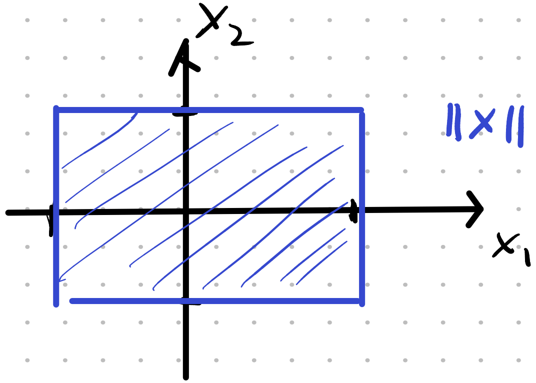
<u>Στον $\mathbb{R}^2$</u> $\qquad \|x\|_p \le 1 \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|x_1| + |x_2| \le 1$$



$\|x\|_1 \le 1$

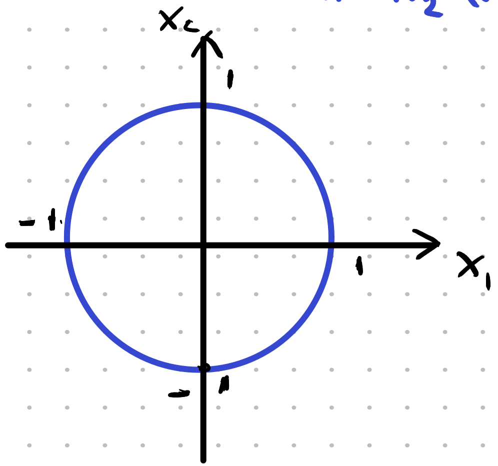
Στον $\mathbb{R}^2$ $\quad \|x\|_\infty \le 1$ $\quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

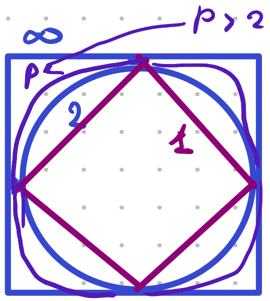


$\|x\|_\infty \le 1$

Κύκλος με κέντρο (x_{01}, x_{02}) και ακτίνα ρ.

$\|x\|_2 \le 1$ $\qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\qquad \left((x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 = \rho^2 \right)$





Άσκηση: $x \in \mathbb{R}^n$ δ.ο $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}$ είναι νόρμα.

α) $\|x\|_2 \geq 0$ ✓ $\quad \|x\|_2 = 0 \Rightarrow \sum_j |x_j|^2 = 0 \Rightarrow x_j = 0 \ \forall j \Rightarrow x = \mathbb{0}$

β) $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \|\lambda x\|_2 = \left(\sum |\lambda x_j|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_j |x_j|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \, \|x\|_2$

γ) $\|x+y\|_2 = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2}$ $\overset{\text{Θ.ν.δ.ο}}{\leq} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$

$$\|x+y\|_2 = \left((x+y)^T (x+y)\right)^{1/2}$$

$\boxed{\text{Συμβολ.} \quad x^T y = (x,y)}$ $\quad \|x\|_2 = \left((x,x) \right)^{1/2}$

$$(x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x,y) \quad (*)$$

$$(x+y)^T (x+y) = (x^T + y^T)(x+y) = x^T x + x^T y + y^T x + y^T y = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$

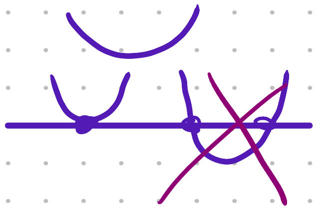
ϑα δείξουμε:

$$|(x,y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2$$

ορίζουμε την συνάρτηση $f(t) = \|x+ty\|_2^2 \geq 0$

$$f(t) = (x+ty,\ x+ty) = (x,x) + t(x,y) + t(y,x) + t^2(y,y) =$$

$$= \|y\|_2^2\, t^2 + 2(x,y)\,t + \|x\|_2^2 \geq 0$$



$\Delta \le 0$ $\quad \Delta = 4[(x,y)]^2 - 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \le 0$

$$\Rightarrow [(x,y)]^2 \le \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \Rightarrow |(x,y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2$$

$* \Rightarrow$

$$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x,y) \le \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2|(x,y)| \le$$

$$\le \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Σύγκλιση ως προς νόρμα.

$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, \{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad x_k = \begin{pmatrix} (x_k)_1 \\ (x_k)_2 \\ \vdots \\ (x_k)_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|} x \in \mathbb{R}^n \iff \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$$

__Θεώρημα__: Σε πεπερασμένους διανυσματικούς χώρους όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες.

__Ορισμός__: Δύο νόρμες $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ ονομάζ. ισοδύναμες αν $\exists\, c, C > 0$

τ.ω. $\qquad c|||x||| \le \|x\| \le C|||x|||$

(__Άσκηση__: δ.ο. $\exists\, m, M > 0$ τ.ω. $m\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|$)

Έστω $|||x_k - x||| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ τότε $\|x_k - x\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Σύγκλιση είναι ανεξάρτητη της νόρμας.