Αριθμητική Ανάλυση - Διάλεξη 3

$Ax = b \Leftrightarrow Ux = c \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A = A^{(1)} \to A^{(2)} \to \dots \to A^{(n)} = U$

$b = b^{(1)} \to b^{(2)} \to \quad \to b^{(n)} = c$

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad m_{21} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

<u>στο $\mathbb{R}$</u>:

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & 1-10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-10^4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9998 \end{bmatrix}$$

$-9999\, x_2 = -9998 \Rightarrow x_2 = \frac{9998}{9999} \approx 1 \quad , \quad 10^{-4} x_1 + \frac{9998}{9999} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{(9999 - 9998) \cdot 10^4}{9999}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10^4}{9999} \approx 1$$

ΣΤΟ $\mathbb{F}(10,3,-6,6)$

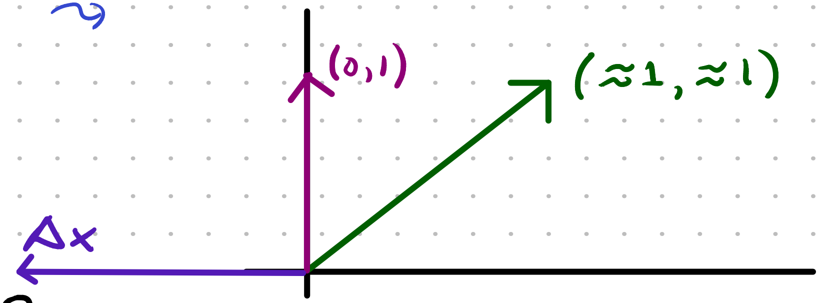
$$-9999 \cong (-1)^1 \cdot (0.999)_{10} \cdot 10^4 \sim -9990$$

$$-9998 \cong (-1)^1 \cdot (0.999)_{10} \cdot 10^4 \sim -9990$$

$$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -9990 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9990 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-9990}{-9990} = 1$$

$$\Rightarrow 10^{-4} \cdot x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$



$$Ax = b \longrightarrow Ux = c \Rightarrow (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

(Αν $\Delta A = 0$, $\Delta b = 0$ ΤΟΤΕ $\Delta x = 0$)

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \quad b + \Delta b = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \Delta x \cong \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3.1 \\ 3.1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} 1.11 & 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.09 & 1.01 \\ 1.01 & 1.01 & 0.99 \end{bmatrix}, \quad b + \Delta b = \begin{bmatrix} 3.11 \\ 3.11 \\ 2.99 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.81 \\ -0.54 \end{bmatrix}$$

Διανυσματικοί Χώροι

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$$

Ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\overbrace{\mathbb{R} (\text{ή } \mathbb{C})}$ είναι ένα μη κενό σύνολο V του οποίου τα στοιχεία θα καλούνται διανύσματα και έχει τις ιδιότητες.

1. $\forall v, w \in V \quad v + w = w + v$ και $\forall u, v, w \in V \quad (u+v) + w = u + (v+w)$
2. $\exists\, \mathbb{0} \in V$ τ.ω $v + \mathbb{0} = v \quad \forall v \in V$
3. $0 \cdot v = \mathbb{0}, \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V, \quad 0 \in \mathbb{K}, \ 1 \in \mathbb{K}$

   $0 \in \mathbb{R} \qquad 1 \in \mathbb{R}$

   $0 + i0 \in \mathbb{C} \qquad 1 + i0 \in \mathbb{C}$
4. $\forall v \in V \quad \exists -v \in V$ τ.ω $v + (-v) = \mathbb{0}$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall v, w \in V \quad \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w \in V$
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall v \in V \quad (\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v \in V$

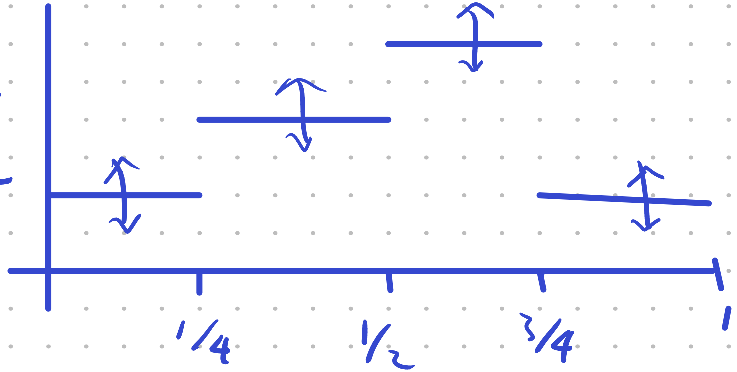
Παραδείγματα

(α) $\mathbb{R}^2 = V$ (διάσταση 2)

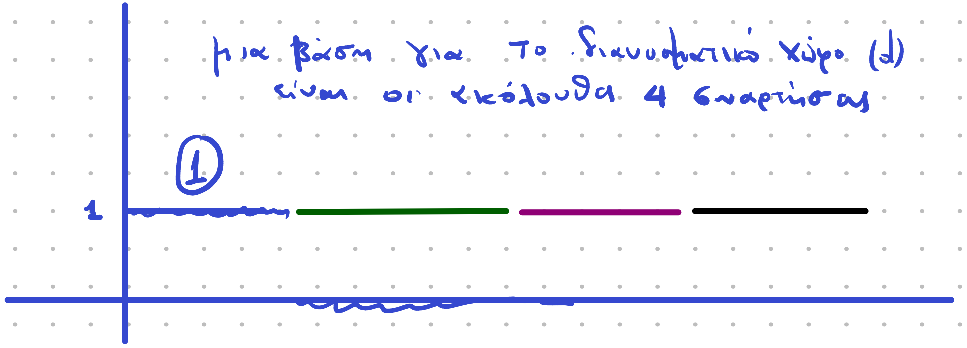
(b) $V = \mathbb{P}^n$ (διάσταση $n+1$)

(c) $V = C^p([\alpha, b])$

(d) όλες οι απλές συναρτήσεις (simple functions) της μορφής

$V = \{$  $\}$ (διάσταση 4)

μια βάση για το διανυσματικό χώρο (d) είναι οι ακόλουθα 4 συναρτήσεις



Νόρμες

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω το $\mathbb{K}$.

Ονομάζουμε ως μια νόρμα του V την απεικόνιση από το V στο $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

η οποία έχει τις ιδιότητες:

(i) $\forall v \in V$ $\|v\| \geq 0$ και $\|v\| = 0$ ανν $v = 0$

(ii) $\forall v \in V$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

(iii) $\forall v, w \in V$ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (τριγωνική ανισ.)

Πχ:

είναι νόρμα ?

Έστω $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \|v\|_1 = \sum_{j=1}^{2} |v_j| = |v_1| + |v_2|$ $\quad \left(v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ τότε } \|v\|_1 = 2 \right)$

(i) και (ii) άμεσα

(iii) Έστω $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$\|v + w\|_1 = |v_1 + w_1| + |v_2 + w_2| \leq \overbrace{|v_1| + |v_2|}^{\|v\|_1} + \underbrace{|w_1| + |w_2|}_{\|w\|_1} = \|v\|_1 + \|w\|_1$$