Αριθμητική Ανάλυση - Διάλεξη 2

Πράξεις κινητής υποδιαστολής σε υπολογιστικά συστήματα.

Πχ. $\underbrace{\overbrace{(2-1{,}999)}^{1\ \text{flop}}\cdot 1000}_{1\ \text{flop}}$

Μονάδα μέτρησης των πράξεων. 1 flop (floating point operator)

Πράξεις : +, −, *, / 1 flop.

$\alpha+b$	1 flop	$\alpha\cdot b+c$	1 flop	$\underbrace{\overbrace{\alpha\cdot b}^{1\ \text{flop}}+\underbrace{c\cdot d}_{1\ \text{flop}}}_{1\ \text{flop}}$	3 flop
$\alpha\cdot b$	1 flop	$\alpha/b+c$	1 flop		
$\alpha-b$	1 flop	$\alpha\cdot b-c$	1 flop		
α/b	1 flop	$\alpha/b-c$	1 flop		

---

① $\alpha\in\mathbb{R}^n,\ b\in\mathbb{R}^n$ $\quad \alpha\cdot b=\alpha^T b=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j b_j=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n$ $\qquad \alpha, b\in\mathbb{R}^2\ (\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2)$

Πολλαπλασιασμοί n
Προσθέσεις $n-1$ $\Big\}\ 2n-1=O(n)$ $\longrightarrow$ $|2n-1|\leq \underset{C}{2n}$ $\quad n_0=1$

$f_n=O(n^p)$: $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ και $C\in\mathbb{R}$ τ.ω $|f_n|\leq C n^p,\ \forall n\geq n_0$

② Πολλαπλασιασμός Πίνακα με διάνυσμα.

$$Ax \quad , A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Το c_i είναι το εσωτερικό γινόμενο της i γραμμής του πίνακα με το διάνυσμα

για μεγάλα m, n.

$$m(2n-1) = 2nm - m \sim 2nm \text{ flop}$$

③ Πολλαπλασιασμός Πινάκων με Πίνακα.

$$AB, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p} \qquad mp(2n-1) \text{ flop} \sim 2nmp$$

④ Ορίζουμε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\underset{(n\times n)}{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots \\ \alpha_{n1}\end{matrix}} & \begin{matrix}\alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \\ \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{matrix}\end{vmatrix}} = \alpha_{11}\underset{(n-1)\times(n-1)}{\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \\ \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}} - \alpha_{21}\underset{(n-1)\times(n-1)}{\begin{vmatrix} \sim \\ \sim \end{vmatrix}} + \cdots \pm \alpha_{n1}\underset{(n-1)\times(n-1)}{\begin{vmatrix} \sim \\ \sim \end{vmatrix}}$$

Έστω ότι η ορίζουσα ενός $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει πολυπλοκότητα S_n

$$S_n = nS_{n-1} + n + n - 1 = nS_{n-1} + 2n - 1.$$

Θα δείξουμε ότι $S_n \geq n!$

για $n = 2$ $\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix} = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21} \sim 3$ flop.

$S_2 \geq 2!$ ✓

Έστω ότι ισχύει $S_n \geq n!$ Θ.Ν.Δ.Ο $S_{n+1} \geq (n+1)!$

$$S_{n+1} = (n+1)S_n + 2(n+1) - 1 \geq \underbrace{(n+1)n!}_{(n+1)!} + \underbrace{2(n+1)-1}_{>0} \geq (n+1)!$$

άρα $\quad S_n \geq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

---

i7 $\sim 10^{11}$ flop/s = flops

Θέλουμε να υπολογίσουμε μια ορίζουσα 50×50

$S_{50} \geq 50!$ $\quad$ Χρόνος εκτέλεσης $\dfrac{50!}{10^{11}}$ sec $= 3 \cdot 10^{53}$ sec $= 9 \cdot 10^{43}$ αιώνες

---

7 και 9 νοεμβρίου όχι μάθημα.

Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

$Ax=b\ ,\ A\in\mathbb{R}^{n\times n}\ ,\ b\in\mathbb{R}^n$

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Το $Ax=b$ έχει μοναδική λύση
2. ο A είναι αντιστρέψιμος ($\exists A^{-1}$ τ.ω $A\cdot A^{-1}=I$)
3. $Ax=0$ έχει μοναδική λύση το $x=\underset{\sim}{0}$
4. $\det A\neq 0$

λύση: $\boxed{x=A^{-1}b}$

1. Αναλυτικές Μέθοδοι Επίλυσης Γραμμικών Συστημάτων
   - → Μέθοδος Crammer
   - → Μέθοδος της Απαλοιφής Gauss + Προς τα πίσω αντικατάσταση.

Μεθοδος Cramer

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & \alpha_{ij} & & \alpha_{in} \\ \vdots & & & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nj} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{j-στήλη} \\ \downarrow \end{array}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & & b_i & & \alpha_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & b_n & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

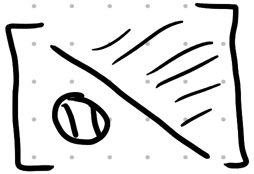
$$\boxed{x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, n.}$$

Πολυπλοκότητα: $\rightarrow$ $n+1$ ορίζουσες. $* \geq n!$
$\rightarrow$ n διαιρέσεις

$\}$ Συνολικό κόστος πράξεων $\geq (n+1) \cdot n! + n \geq (n+1)!$

Απαλοιφή Gauss (Gauss Elimination Method) -GEM-

$Ax = b \longrightarrow Ux = c$

$U =$ 

$n=2$ $\quad A^{(1)} \qquad A^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} \\ \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{12}^{(2)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11}^{(1)} = \alpha_{11}^{(2)}, \quad \alpha_{12}^{(1)} = \alpha_{12}^{(2)}, \quad \alpha_{22}^{(1)} \neq \alpha_{22}^{(2)}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} A^{(1)} & \to & A^{(2)} & \to & A^{(3)} & \to & \cdots & \to & A^{(n)} \\ \| & & & & & & & & \| \\ A & & & & \longrightarrow & & & & U \end{array}$$

$$\overset{A = A^{(1)}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} \to \overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Υπολογίζουμε τους πολλαπλασιαστές

1º βήμα $\quad A^{(1)} \to A^{(2)}$

$\qquad\qquad b^{(1)} \to b^{(2)}$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, \dots, n \quad \sim (n-1) \text{ flop}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2, \dots, n \quad \sim (n-1)^2 \text{ flop}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2, \dots n \quad \sim (n-1) \text{ flop}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} b^{(1)} & \to & b^{(2)} & \to & b^{(3)} & \to & \cdots & \to & b^{(n)} \\ \| & & & & & & & & \| \\ b & & & & & & & & c \end{array}$$

<u>για το πρώτο βήμα</u> έχουμε υπολογιστικό κόστος

$$(n-1) + (n-1) + (n-1)^2 \text{ flop}$$

$$\| $$

$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \text{ flop}$$

$$\Big\} \; n \gg 1$$

$$n^2 \text{ flop}$$

για το δεύτερο βήμα

$\sim (n-1)^2$ flop

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\hspace{3em}}_{(n-1)\times(n-1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ \\ \underbrace{\hspace{1em}}_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

Συνολικό κόστος $\sim \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{n\gg 1}{\sim} \frac{2n^3}{6} = n^3/3 \sim O(n^3)$

για την κατασκευή των U, c

Προς τα πίσω αντικατάσταση

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & U_{n-1,n-1} & U_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & U_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$x_n = c_n / U_{nn}$ 1 flop.

$U_{n-1,n-1}\, \underbrace{x_{n-1}} + U_{n-1,n}\, x_n = c_{n-1}$

$x_{n-1} = \dfrac{c_{n-1} - U_{n-1,n}\, x_n}{U_{n-1,n-1}}$ 2 flop.

$x_{n-2} \longrightarrow$ 4 flop

$x_{n-3} \longrightarrow$ 6 flop.

$$\sim \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\frac{n(n+1)}{2} \sim O(n^2)$$

Συνολικά η προς τα πίσω αντικατάσταση δεν συνεισφέρει σημαντικά στο υπολογιστικό κόστος

Άρα το συνολικό κόστος επίλυσης του συστήματος $n \times n$ με την GEM είναι $\sim n^3/3$ για $n \gg 1$

$$\left.\begin{aligned} &i7 \sim 10^{11} \text{ flops} \\ &n = 50 \end{aligned}\right\} \quad \frac{50^3/3}{10^{11}} \text{ sec} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$