Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

$$y'(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Διαφορική Εξίσωση 1η Τάξης : $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) , & t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ (ΠΑΤ)

για $0 < h << 1$ $\quad y'(t) \approx \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h}$

ΠΑΤ $\longrightarrow$ Προσεγγιστικό ΠΑΤ

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(t, y(t)) \Rightarrow y(t+h) = y(t) + h f(t,y)$$

(Προσεγγιστικό ΠΑΤ) $\quad h$ δοσμένο.

Έστω $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) , & t \in [\alpha, b] \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$

Θεωρούμε διαμέριση Δ του $[\alpha, b]$. $\quad \Delta: \ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$
(ομοιόμορφη)

$$h = \frac{b-\alpha}{n} \quad \text{πλάτος διαμέρισης.}$$

$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, \dots, n.$

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} \quad (*)$$

$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [\alpha, b]$ άρα η εξίσωση ικανοποιείται και $\forall t_k \in \Delta$

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} \approx f(t_k, y(t_k)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)), \quad k = 0, \dots, n-1$$

για $k=0$: $\quad y(t_1) \approx \underbrace{y(t_0)}_{y_0} + h f(t_0, \underbrace{y(t_0)}_{y_0}) = \underbrace{y_0 + h f(t_0, y_0)}_{\text{άμεσως υπολογισμός}}$

για $k=1$: $\quad y(t_2) \approx y(t_1) + h f(t_1, y(t_1)) \approx y_0 + h f(t_0, y_0) + h f(t_1, y_0 + h f(t_0, y_0))$

Αμεση μέθοδος του Euler.

y_0 δοσμένο από την αρχική συνθήκη.

$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$, $k = 0, \dots, n-1$, και y_k είναι η προσέγγιση του $y(t_k)$

$$|y_k - y(t_k)| < \dots ? \quad \forall k = 0, \dots, n$$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y(t_k) + h y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k), \quad \xi_k \in (t_k, t_{k+1})$$

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{h y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)}{h} - \frac{y_{k+1} - y_k}{h} =$$

$$= \underbrace{y'(t_k)} + \frac{h}{2} y''(\xi_k) - \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k) + \frac{h}{2} y''(\xi_k), \quad \xi_k \in (t_k, t_{k+1})$$

Υπόθεση: Έστω f Lipschitz στη δεύτερη μεταβλητή

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L|y-z|$$, για κάποιο $L>0$, και $\forall\, y,z$

$$\left| \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} - \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \right| \le \left| f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k) \right| + \frac{h}{2} |y''(\xi_k)| \le$$

$$\le L\,|y(t_k) - y_k| + \frac{h}{2}|y''(\xi_k)| \Rightarrow \left| (y(t_{k+1}) - y_{k+1}) - (y(t_k) - y_k) \right| \le$$

$$\le hL\,|y(t_k) - y_k| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_k)|$$

Τριγωνική ανισότητα:

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| - |y(t_k) - y_k| \le |(y(t_{k+1}) - y_{k+1}) - (y(t_k) - y_k)|$$

$$\Rightarrow |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \le (1 + hL)\,|y(t_k) - y_k| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_k)|$$ (Αναδρομική σχέση)

για $\underline{k=0}$

$$|y(t_1)-y_1| \le (1+hL)\overbrace{|y(t_0)-y_0|}^{0} + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_0)| \quad , \quad \xi_0 \in (t_0,t_1)$$

για $k=1$

$$|y(t_2)-y_2| \le (1+hL)\left[\frac{h^2}{2}|y''(\xi_0)|\right] + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_1)| \quad , \quad \xi_1 \in (t_1,t_2)$$

$$= \left[(1+hL)|y''(\xi_0)| + |y''(\xi_1)|\right]\frac{h^2}{2}$$

$$|y(t_{k+1})-y_{k+1}| \le \left[(1+hL)^k|y''(\xi_0)| + (1+hL)^{k-1}|y''(\xi_1)| + \dots + (1+hL)|y''(\xi_{k-1})| + |y''(\xi_k)|\right]\frac{h^2}{2}$$

$$\le \left[(1+hL)^k + (1+hL)^{k-1} + \dots + (1+hL)^1 + 1\right]\frac{h^2}{2}\max_{\xi\in[a,b]}|y''(\xi)| =$$

$$= \frac{(1+hL)^{k+1}-1}{\cancel{1}+hL\cancel{-1}}\,\frac{h^2}{2}\max_{\xi\in[a,b]}|y''(\xi)| = \frac{1}{2L}\max_{\xi\in[a,b]}|y''(\xi)|\left[(1+\underbrace{hL}_{\delta})^{k+1}-1\right]h$$

$1+\delta \le e^{\delta} \quad \forall \delta>0$ $\qquad k=0,\dots,n-1$

$$\le \frac{1}{2L}\max|y''(\xi)|\left[e^{hL(k+1)}-1\right]h \le \frac{1}{2L}\max_{\xi\in[a,b]}|y''(\xi)|\left[e^{nhL}-1\right]h$$

$h=\frac{b-a}{n}$

$$|y(t_{k+1})-y_{k+1}| \le \frac{1}{2L}\max_{\xi\in[a,b]}|y'(\xi)|\left[e^{L(b-a)}-1\right]h$$

$\Rightarrow \forall k=0,\dots,n$ $\quad \boxed{|y(t_k)-y_k| \le \frac{1}{2L}\max|y''(\xi)|\left[e^{L(b-a)}-1\right]h}$

γ'ℓ $h\to 0 \Rightarrow y(t_k)=y_k.$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad f(t,y) = e^t + y, \quad t \in [0,1]$$

Δ

$t_0 = 0, t_1 = 1/2, t_2 = 1$

Άμεση Μέθοδος του Euler.

$y_0 = y(0) = 0.$

$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + \frac{1}{2}e^0 + 0 = 1/2$

$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(1/2, 1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{1/2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{1/2} + 1/4.$

Είναι Lipsh.?

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |e^t + y_1 - e^t - y_2| = |y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|, \quad L = 1$

$$|y(t_k) - y_k| \leq \frac{e-1}{2} \cdot \frac{1}{2} \max_{\xi \in [a,b]} |y''(\xi)| = \frac{e-1}{4} \max_{\xi \in [a,b]} |y''(\xi)|.$$