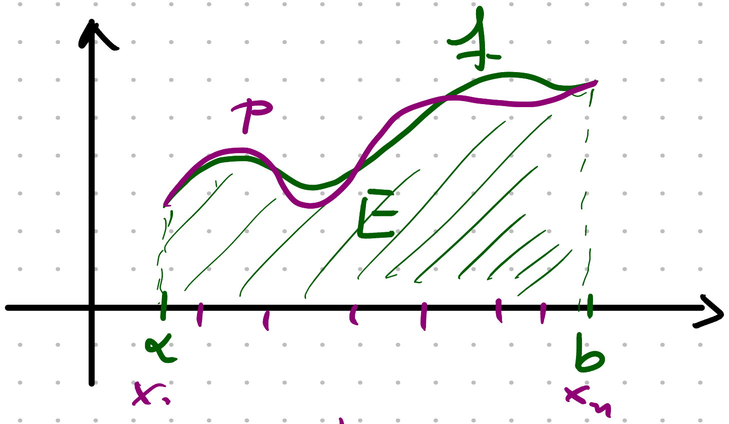
Αριθμητική Ολοκλήρωση

Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\qquad E=\int_\alpha^b f(x)\,dx$



για την p είναι εύκολο να ολοκληρωθεί αναλυτικά

$p\approx f$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx \cong \int_\alpha^b p_n(x)\,dx$$

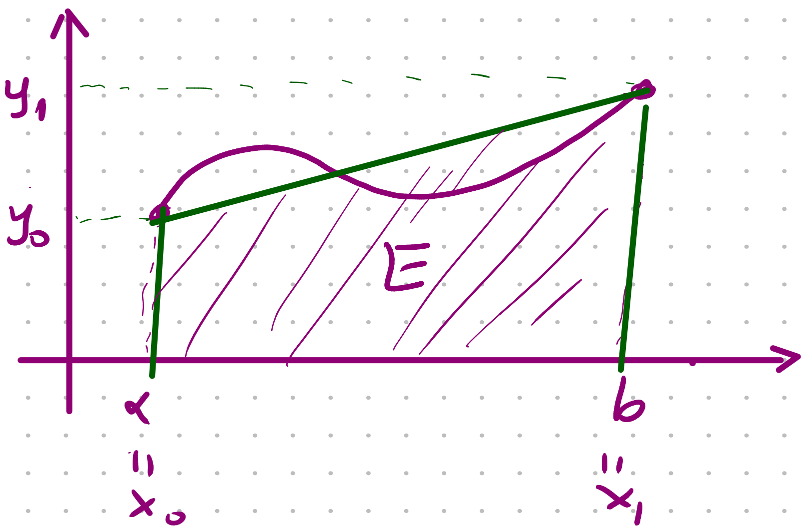
όπου p_n το πολυώνυμο παρεμβολής στους κόμβους $\alpha=x_0<x_1<\dots<x_n=b$.

κανόνα ολοκλήρωσης

$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$, όπου $L_j(x)$ τα πολυώνυμα Lagrange.

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx \simeq \int_\alpha^b \sum y_j L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} y_j \overbrace{\int_\alpha^b L_j(x)\,dx}^{w_j} = \sum_{j=0}^{n} w_j y_j = \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

A. Απλός κανόνας του Τραπεζίου.



$$\Delta = \{\alpha = x_0 < x_1 = b\}$$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx \approx E$$

$L_0(x), L_1(x)$ βάση.

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$w_0 = \int_\alpha^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = -\frac{1}{b-\alpha}\int_\alpha^b (x-b)\,dx = -\frac{1}{b-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^b + \frac{b}{b-\alpha}(b-\alpha) =$$

$$= -\frac{b^2-\alpha^2}{2(b-\alpha)} + b = -\frac{b+\alpha}{2} + b = \frac{b-\alpha}{2}$$

$$w_1 = \dots = \frac{b-\alpha}{2}.$$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx \approx \frac{b-\alpha}{2} f(\overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{x_0}}) + \frac{b-\alpha}{2} f(\overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_1}}) = \frac{1}{2}(b-\alpha)\left[f(\alpha)+f(b)\right]$$

$$\boxed{Q_2(f) = \frac{1}{2}(b-\alpha)\left[f(\alpha)+f(b)\right]}$$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f \in C^2([\alpha,b])$ τότε

$$\left|\int_\alpha^b f(x)\,dx - Q_2(f)\right| \leq \frac{(b-\alpha)^3}{12} \max_{\xi\in[\alpha,b]} |f''(\xi)|.$$

<u>Απόδειξη.</u>

$$\left|\int_\alpha^b f(x)\,dx - \int_\alpha^b P_1(x)\,dx\right| \leq \int_\alpha^b |f(x)-P_1(x)|\,dx = \int_\alpha^b \frac{\max|f''(\xi)|}{2} \max|(x-\alpha)(x-b)|\,dx$$

$$\leq \frac{\max|f''(\xi)|}{2} \cdot \int_\alpha^b (b-x)(x-\alpha)\,dx = \frac{(b-\alpha)^3}{12} \max_{\xi\in[\alpha,b]}|f''(\xi)|.$$

Παράδειγμα: $f(x) = \cos^2 x$ $\quad \int_0^{\pi} f(x)dx = ;$

$$Q_2(f) = \frac{\pi}{2}\left[\cos^2(0) + \cos^2(\pi)\right] = \pi$$

$$f'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

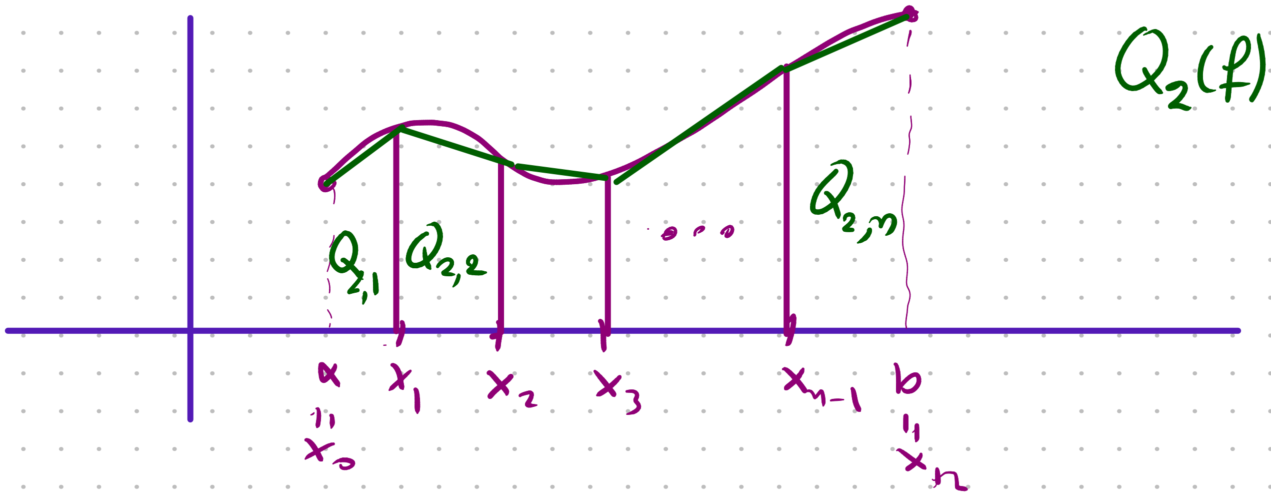
$$f''(x) = -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$|f''(x)| \le 2$$

$$|f(x) - Q_2(f)| \le 2\frac{\pi^3}{12} = \frac{\pi^3}{6}$$

Το σφάλμα περιμένουμε να είναι αρκετά μεγάλο.

Β. Σύνθετος κανόνας Τραπεζίου.



$$Q_2(f) = \sum_{j=1}^{n} Q_{2,j}(f)$$

Έστω Δ ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$ με $n+1$ σημεία.

$$h = x_j - x_{j-1}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f) \right| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} Q_{2,j}(f) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} Q_{2,j}(f) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx - Q_{2,j}(f) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{12} \max_{\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi_j)| =$$

$$= \frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^{n} \max_{\xi_j [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi_j)| \leq \frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^{n} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| =$$

$$= \frac{n h^3}{12} \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

$$\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \cdot n \longrightarrow \frac{(b-a)^3}{n^2} \to 0 \right]$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x)=\cos^2 x$. Πόσους κόμβους χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε το $\int_0^{\pi} f(x)dx$ με ακρίβεια τουλάχιστον 10^{-3} με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου.

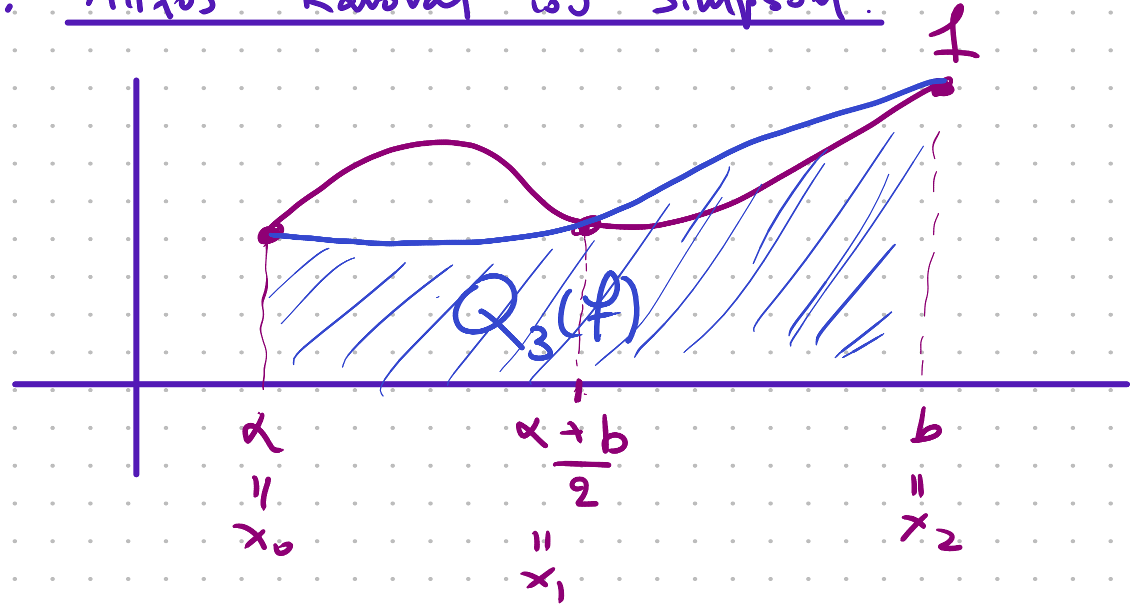
$$h=\frac{\pi}{n}$$

Το απόλυτο σφάλμα φράσσεται από το $\frac{n\pi^3}{n^3\cdot 12}\max_{\xi\in[0,\pi]}|f''(\xi)| \le \frac{\pi^3}{12n^2}\cdot 2 = \frac{\pi^3}{6n^2} < 10^{-3}$

$$\overbrace{\frac{nh^3}{12}\max|f''|}^{''} \qquad h=\frac{\pi}{n}$$

$$6n^2 > \frac{\pi^3}{10^{-3}} \Rightarrow n^2 > \frac{\pi^3}{6}\cdot 10^3 \Rightarrow n > 71.886 \Rightarrow n=72$$

Γ. Απλός κανόνας του Simpson.



Προσεγγίζουμε την f με πολ. 2 βαθμού.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = Q_3(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$w_j = \int_\alpha^b L_j(x)\,dx$$

$$w_0 = w_2 = \frac{b-\alpha}{6}, \quad w_1 = 4 \cdot \frac{b-\alpha}{6}.$$

$$Q_3(f) = \frac{b-\alpha}{6}\left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω $f \in C^4([\alpha,b])$ και ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$ με $x_j - x_{j-1} = h$.

Τότε $$\left|\int_\alpha^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} Q_{3,j}(f)\right| \leq n \frac{h^5}{180 \cdot 2^4} \max_{\xi \in [\alpha,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

όπου $Q_{3,j}$ είναι ο απλός κανόνας του Simpson στο $[x_{j-1}, x_j]$

Ορίζουμε $Q_3(f) = \sum_{j=1}^{n} Q_{3,j}(f)$, τον σύνθετο κανόνα Simpson.

Παράδειγμα: Έστω $f(x)=\cos^2 x$. Πόσους κόμβους χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε το $\int_0^{\pi} f(x)dx$ με ακρίβεια τουλάχιστον 10^{-3} με τον σύνθετο κανόνα του Simpson.

Το απόλυτο σφάλμα φράσσεται από το $\dfrac{n h^5}{2^4 \cdot 180} \max\limits_{[0,\pi]} |f^{(4)}(\xi)|$

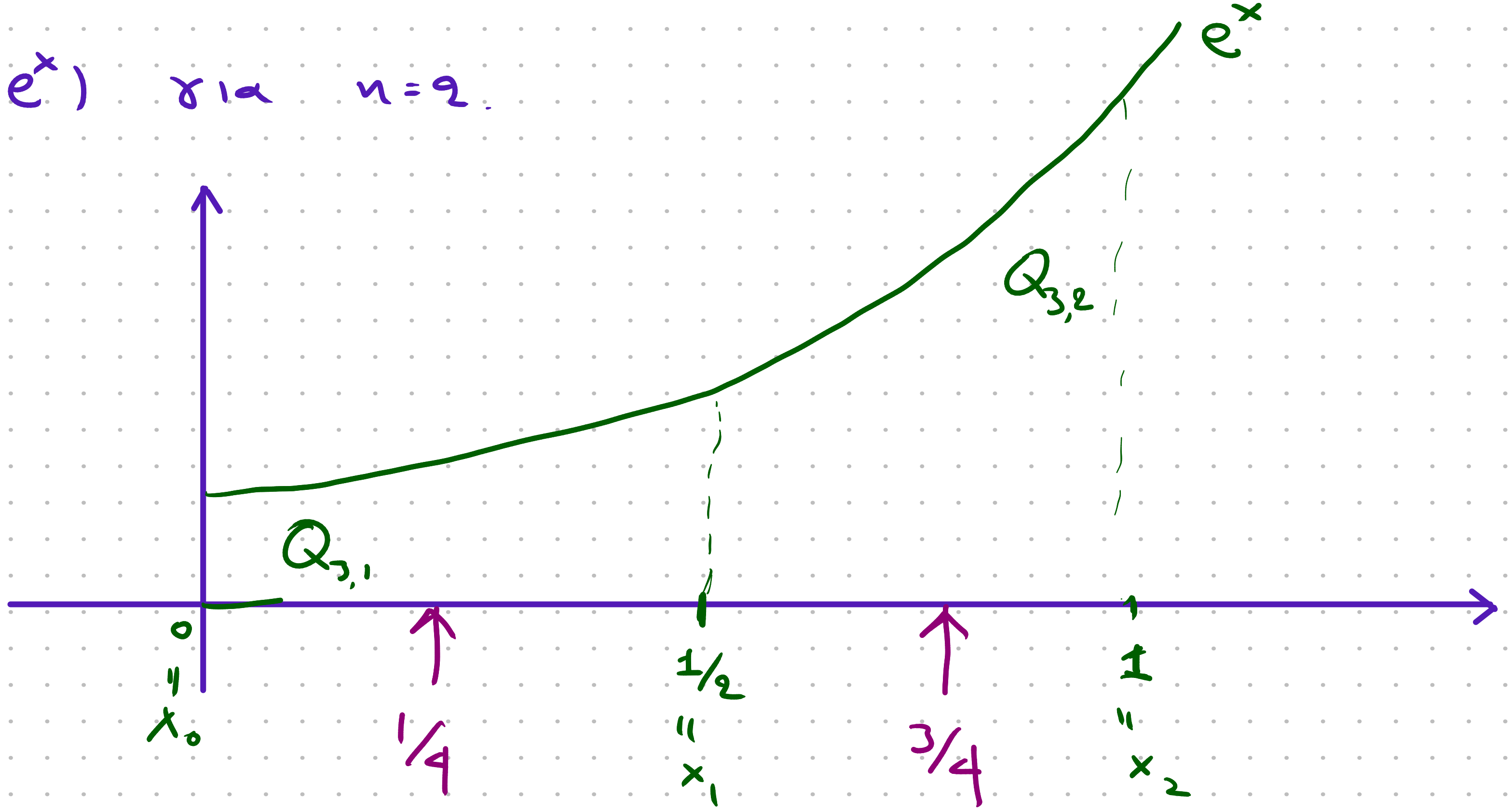
$$h=\frac{\pi}{n} \qquad \frac{n\pi^5}{2^4 n^5 \cdot 180} \cdot 2^3 < 10^{-3} \Rightarrow n^4 > \frac{10^3 \pi^5}{360} \Rightarrow n > 5.399$$

$$\Rightarrow n=6.$$

Παράδειγμα:

$\int_0^1 e^x dx$ Το αποτέλεσμα γνωρίζουμε ότι είναι $e-1$.

$Q_3(e^x)$ για $n=2$.



$$Q_{3,1}(e^x) = \frac{1/2}{6}\left[e^0 + 4e^{1/4} + e^{1/2}\right] = \frac{1}{12}(1 + 5.136 + 1.648) = \frac{7.784}{12} = 0.648$$

$$Q_{3,2}(e^x) = \frac{1/2}{6}\left[e^{1/2} + 4e^{3/4} + e^1\right] = \frac{1}{12}(1.648 + 8.468 + 2.71) = \frac{12.834}{12} =$$

$$= 1.069.$$

$$Q_3(e^x) = Q_{3,1}(e^x) + Q_{3,2}(e^x) = 1.712 \approx e - 1$$