Πολυωνυμική Παρεμβολή

$f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ $\qquad$ $(n+1)$ σημεία.

$f \in C^{(n+1)}([\alpha, b])$ $\qquad$ $f(x_0), f(x_1) \ldots f(x_n)$ γνωστές τιμές.

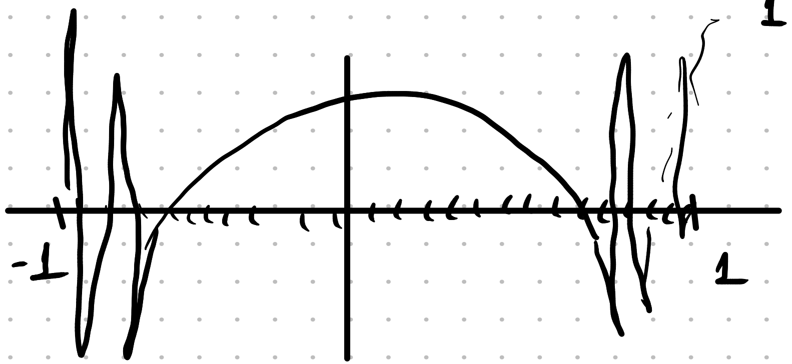
$$\underset{y_1}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}}, \quad \underset{y_2}{\overset{\shortparallel}{f(x_1)}} \quad \ldots \quad \underset{y_n}{\overset{\shortparallel}{f(x_n)}}$$

$\exists$ μοναδικό πολυώνυμο $p_n : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$. τ.ω $p_n(x_j) = y_j$

$$\max_{x \in [\alpha, b]} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha, b]} |f^{(n+1)}(x)| \max_{x \in [\alpha, b]} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right|$$

Αστοχεί σε κάποιες περιπτώσεις

The Runge function $\qquad f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$, $x \in [-1, 1]$



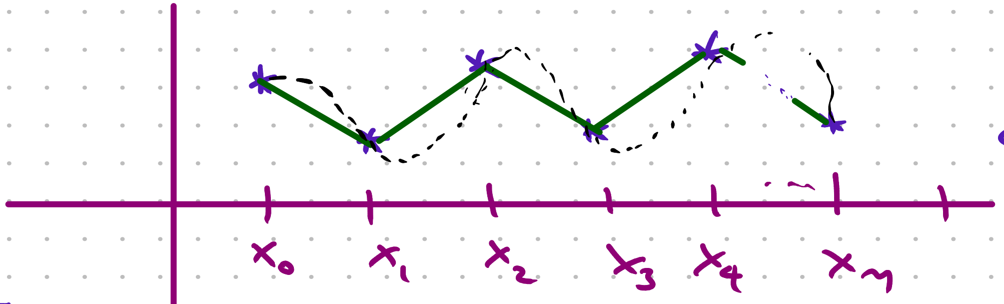
$$\lim_{n \to \infty} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_n(x)| = \infty$$

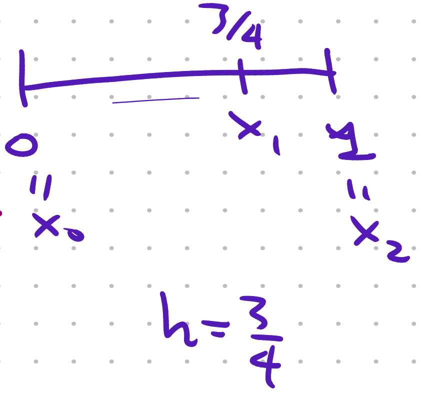
Διαμέριση Chebyshev $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j=0,\dots,n$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_n(x)| = 0$$ για τη συγκεκριμένη διαμέριση.

Παρεμβολή με Splines

→ Γραμμικές Splines.





Ορίζουμε την διαμέριση του $[\alpha, b]$

$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $x_0 = \alpha$, $x_n = b$ και $x_j < x_{j+1}$

$$h = \max_{j=0,\dots,n-1} |x_{j+1} - x_j|$$

Χώρος των Γραμμικών Splines.

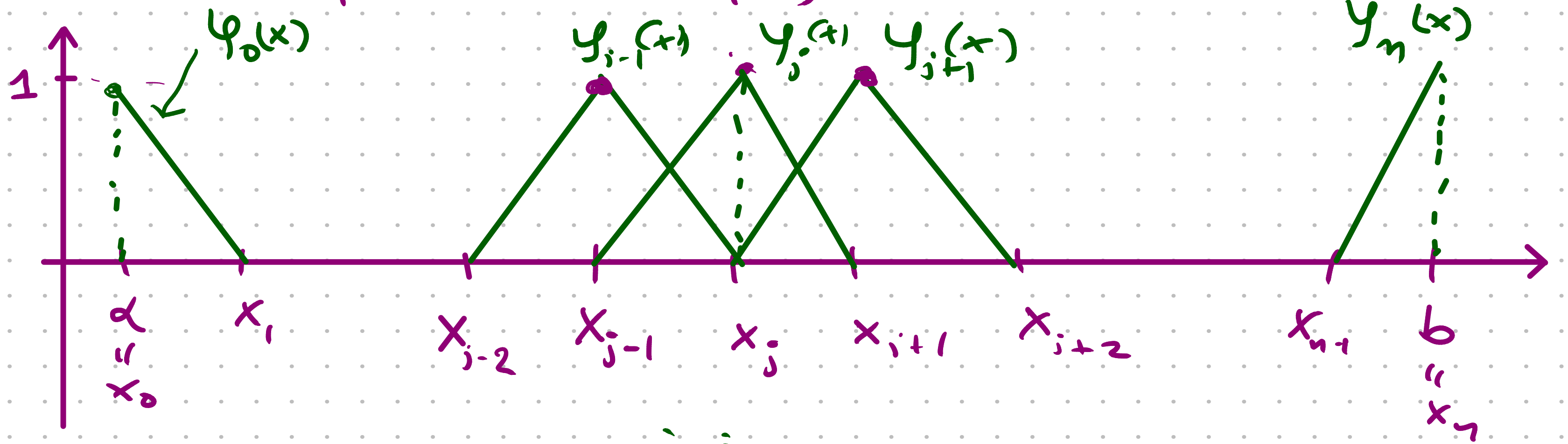
Πολυώνυμο πρώτου βαθμού

$$S_1(\Delta) = \{ f \in C([\alpha,b]) : f|_{[x_{j-1},x_j]} \in P_1 \}$$

Το $S_1(\Delta)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο.

$\dim(S_1(\Delta)) = n+1$.

Κατασκευή βάσης του $S_1(\Delta)$



$$\varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Έστω $f \in S_1(\Delta)$ μπορούμε να γράψουμε $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{f(x_j)}_{w_j} \varphi_j(x)$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} w_j \varphi_j(x) \quad , \quad f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} w_j \varphi_j(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \delta_{ij} W_j = W_i$$

$$f(x_1) = \sum_{j=0}^{n} \delta_{1j} W_j = \underbrace{\delta_{10}}_{0} W_0 + \underbrace{\delta_{11}}_{1} W_1 + \underbrace{\delta_{12}}_{0} W_2 + \dots \underbrace{\delta_{1n}}_{0} W_n$$

$$= w_1$$

Βάση του $S_1(\Delta)$

$$\varphi_0 = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} , & x \in [x_0, x_1] \\ 0 , & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} , & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} , & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 , & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n-1$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} , & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 , & x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Έστω $f \in C^1([a,b])$ τότε μπορώ να προσεγγίσω την f στο χώρο $S_1(\Delta)$

$s \in S_1(\Delta)$, $\boxed{s(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \varphi_j(x) \quad , \text{ όπου } \ y_j = f(x_j)}$

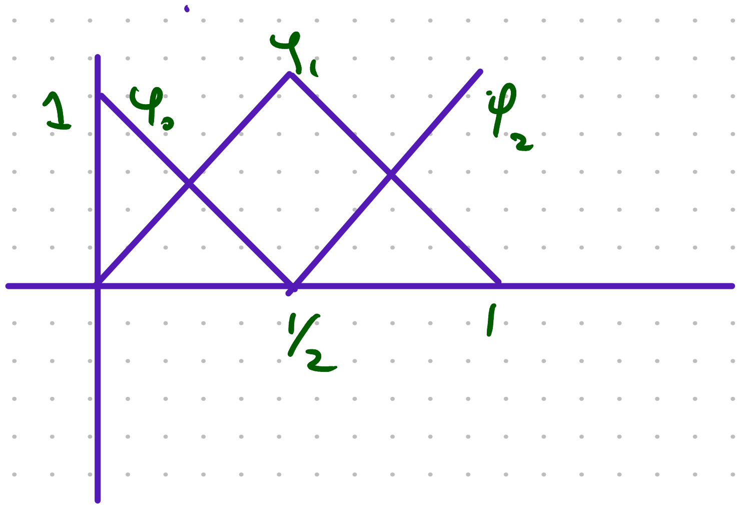
Παράδειγμα:

$\Delta = \{0, 1/2, 1\}$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1/2 - x}{1/2 - 0} , & x \in [0, 1/2] \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 0}{1/2 - 0} , & x \in [0, 1/2] \\ \dfrac{1 - x}{1 - 1/2} , & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 , & x \in [0, 1/2] \\ \dfrac{x - 1/2}{1 - 1/2} , & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$



άγνωστο.

$f(x) = e^x$

$f(0) = 1$

$f(1/2) = e^{1/2}$

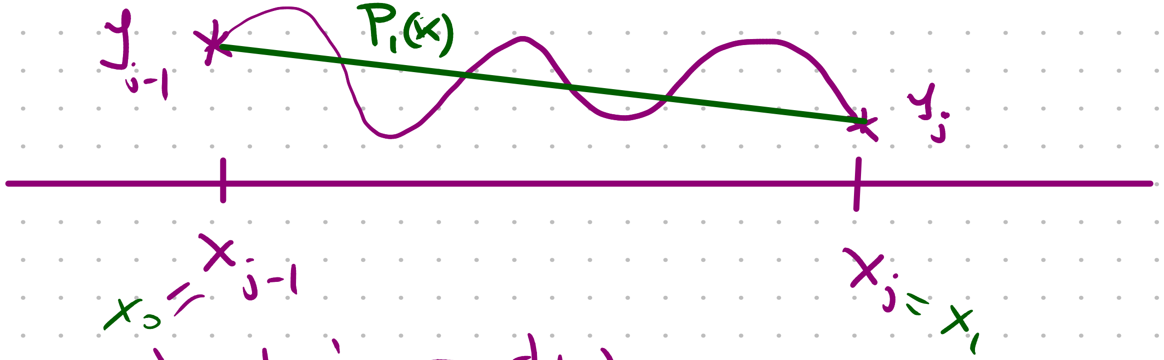
$f(1) = e$

$$S(x) = f(0)\cdot\varphi_0(x) + f(1/2)\,\varphi_1(x) + f(1)\,\varphi_2(x) = \begin{cases}(1-2x), & x\in[0,1/2]\\ 0, & x\in[1/2,1]\end{cases}$$

$$+\ e^{1/2}\begin{cases}2x, & x\in[0,1/2]\\ 2-2x, & x\in[1/2,1]\end{cases} + e\begin{cases}0, & x\in[0,1/2]\\ 2x-1, & x\in[1/2,1]\end{cases}$$

Μελέτη του απόλυτου σφάλματος.

Θεωρούμε το υποδιάστημα $[x_{j-1}, x_j]$



Από πολυωνυμική παρεμβολή

$$\max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f(x)-P_1(x)| \leq \frac{1}{(1+1)!} \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f''(x)| \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |(x-x_{j-1})(x-x_j)|$$

Εφόσον υπάρχει η $f''(x)$.

$x\in[x_{j-1},x_j]$

$$|(x-x_{j-1})(x-x_j)| = \underset{\overset{\wedge}{0}}{(x-x_{j-1})}\,\underset{\overset{\wedge}{0}}{(x_j-x)}$$

ορίζουμε $g(x) = (x-x_{j-1})(x_j-x)$

$$g'(x) = (x_j-x) - (x-x_{j-1}) = x_j - x - x + x_{j-1} = x_j + x_{j-1} - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_{j-1}+x_j}{2} \qquad g''(x) < 0$$

άρα g λαμβάνει μέγιστο στο $x = \dfrac{x_{j-1}+x_j}{2}$

$$\max_{x\in[x_{j-1},x_j]} g(x) = \left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2} - x_{j-1}\right)\left(x_j - \frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right) =$$

$$= \frac{x_j - x_{j-1}}{2}\cdot\frac{x_j - x_{j-1}}{2} = \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4}$$

$$\max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{1}{2}\max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f''(x)|\,\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{4}, \quad h_j = x_j - x_{j-1}$$

$$\boxed{\max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{h_j^2}{8}\max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f''(x)| \leq \frac{h^2}{8}\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}$$

$\forall$ κάθε υποδιάστημα στο Δ.

$$\boxed{\text{Άρα} \quad \max_{x\in[\alpha,b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x\in[\alpha,b]} |f''(x)|}$$

Κυβικές Splines

Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ μιας διαμέρισης Δ. θεωρούμε ένα κυβικό πολυώνυμο ($3^{ου}$ βαθμού)

$\alpha_{j3}x^3 + \alpha_{j2}x^2 + \alpha_{j1}x + \alpha_{j0}$ συντελεστές $(\alpha_{j3}, \alpha_{j2}, \alpha_{j1}, \alpha_{j0})$, 4 σε κάθε υποδιάστημα

Απαιτούμε:

$$\left.\begin{array}{lll}
S(x_j) = f(x_j) = y_j & , j=0,\dots,n & (n+1) - \text{εξισώσεις} \\
S'(x_j^-) = S'(x_j^+) & , j=1,\dots,n-1 & (n-1) - \text{εξισώσεις} \\
S''(x_j^-) = S''(x_j^+) & , j=1,\dots,n-1 & (n-1) - \text{εξισώσεις} \\
S(x_j^-) = S(x_j^+) & , j=1,\dots,n-1 & (n-1) - \text{εξισώσεις}
\end{array}\right\} \; 4n-2 \text{ εξισώσεις}$$

Θέλουμε άλλες 2 εξισώσεις.

$S''(a) = S''(b) = 0$ (2 - εξισώσεις)

Ορισμός του χώρου $S_3(\Delta)$

Έστω διαμέριση Δ με κόμβους $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b$ του $[\alpha, b]$

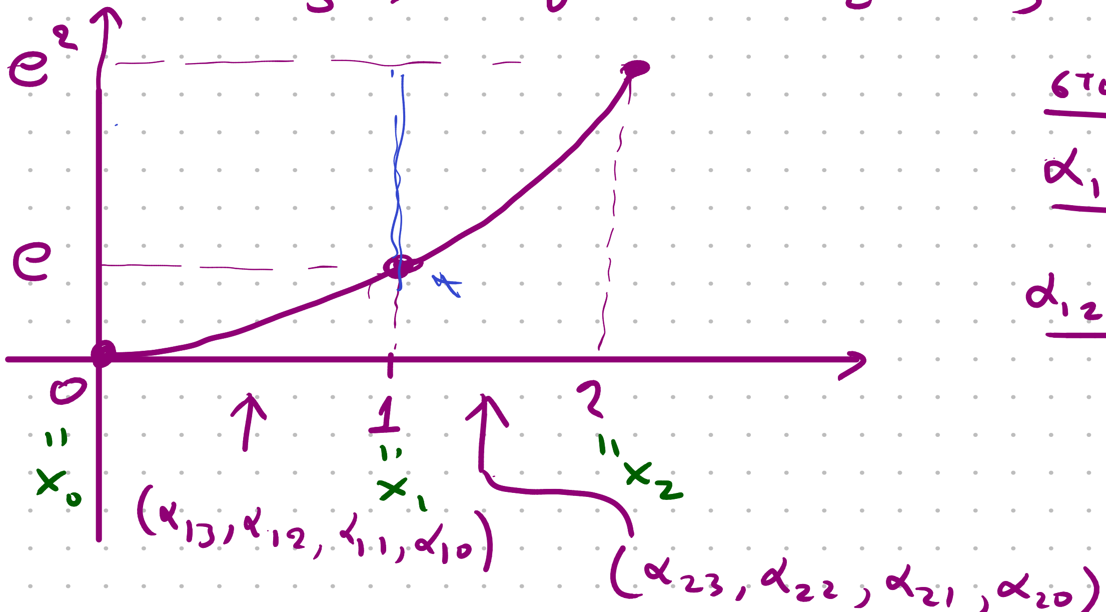
ορίζουμε την οικογένεια των φυσικών κυβικών splines ως προς Δ.

$$S_3(\Delta) = \left\{ f \in C^2([\alpha, b]) \; : \; f|_{[x_{j-1}, x_j]} \text{ να είναι πολυώνυμο 3 βαθμού, } f''(\alpha) = f''(b) = 0 \right\}$$

<u>φυσικές</u> κυβικές splines καθορίζονται $f''(\alpha) = f''(b) = 0$.

Παράδειγμα

έστω $f(x)=e^x$, $x\in[0,2]$ θέλουμε να προσεγγίσουμε την f στον χώρο $S_3(\Delta)$ για $\Delta=\{0,1,2\}$



στο $x_0=0$.

$\alpha_{10}=0$ $\quad(\alpha_{13}\cdot 0^3+\alpha_{12}\cdot 0^2+\alpha_{11}\cdot 0+\alpha_{10}=0)$

$\alpha_{12}=0$ $\quad(6\alpha_{13}\overset{0}{x}+2\alpha_{12}=0)$ ✓

στο $x_2=2$

$\alpha_{23}\cdot 2^3+\alpha_{22}\cdot 2^2+\alpha_{21}\cdot 2+\alpha_{20}=e^2$

$6\alpha_{23}\cdot 2+2\alpha_{22}=0$ ✓

8 άγνωστες παράμετροι.

$\alpha_{13}x^3+\alpha_{12}x^2+\alpha_{11}x+\alpha_{10}$

στο $x_1=1$

$\alpha_{13}\cdot 1^3+\alpha_{12}1^2+\alpha_{11}\cdot 1+\alpha_{10}=e$

$$\alpha_{23}\cdot 1^3 + \alpha_{22}\cdot 1^2 + \alpha_{21}\cdot 1 + \alpha_{20} = e$$

Συνέχεια $1^{ης}$ παραγώγου

$$3\alpha_{13}\cdot 1^2 + 2\alpha_{12}\cdot 1 + \alpha_{11} = 3\alpha_{23}\cdot 1^2 + 2\alpha_{22}\cdot 1 + \alpha_{21}$$

Συνέχεια $2^{ης}$ παραγώγου.

$$6\alpha_{13}\cdot 1 + 2\alpha_{12} = 6\alpha_{23}\cdot 1 + 2\alpha_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$