Μέθοδος Newton - Raphson (N-R)

$f(x)=0$

$x^{(0)} \in [\alpha, b] \subset \mathbb{R}$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$$

$$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}; \lambda(x)) = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{\lambda(x^{(k-1)})}$$

$x^{(k)} \to x^*$, $f(x^*)=0$

$x^{(k-1)} \longrightarrow N\text{-}R \longrightarrow x^{(k)}$

Πιθανός περιορισμός: Δεν γνωρίζουμε την f'

$$f'(x^{(k-1)}) \simeq \frac{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k-2)})}{x^{(k-1)} - x^{(k-2)}} \quad \longleftarrow \text{Μέθοδος της Τέμνουσας.}$$

$$\Rightarrow \quad x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{\dfrac{f(x^{(k-1)}) - f(x^{(k-2)})}{x^{(k-1)} - x^{(k-2)}}}$$

$x^{(k-2)}, x^{(k-1)} \longrightarrow \text{Μέθοδος Τέμνουσας} \longrightarrow x^{(k)}$

<u>Ερώτημα</u>: Πως βρίσκω το $x^{(1)}$; Εκτελώ μια μονοβηματική μέθοδο. Π.χ. Μέθοδος της διχοτόμησης.

Γενικά :

→ Εκτελώ κάποιες επαναλήψεις πχ. 10 με τη μέθοδο της διχοτόμησης

→ $x^{(10)} \doteq x^{(0)}$ στη μέθοδο N-R

→ $x^{(9)} \doteq x^{(0)}$, $x^{(10)} \doteq x^{(1)}$ στη μέθοδο της τέμνουσας

Επίλυση Μη γραμμικών Συστημάτων.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $x^* \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο $f(x^*) = \mathbb{O}_n$

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$

στο $\mathbb{R}$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x - \dfrac{f(x)}{\lambda(x)}$, $\lambda(x) \neq 0$. , $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{\lambda(x)}$

στον $\mathbb{R}^n$: $f(x) = \mathbb{O} \iff x = x - \Lambda^{-1}(x) f(x)$, όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$

$\Lambda(x)$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας στον $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Phi(x) = x - \overbrace{\Lambda^{-1}(x) f(x)}^{\in \mathbb{R}^n}$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Μέθοδος Newton-Raphson (N-R) στον $\mathbb{R}^n$

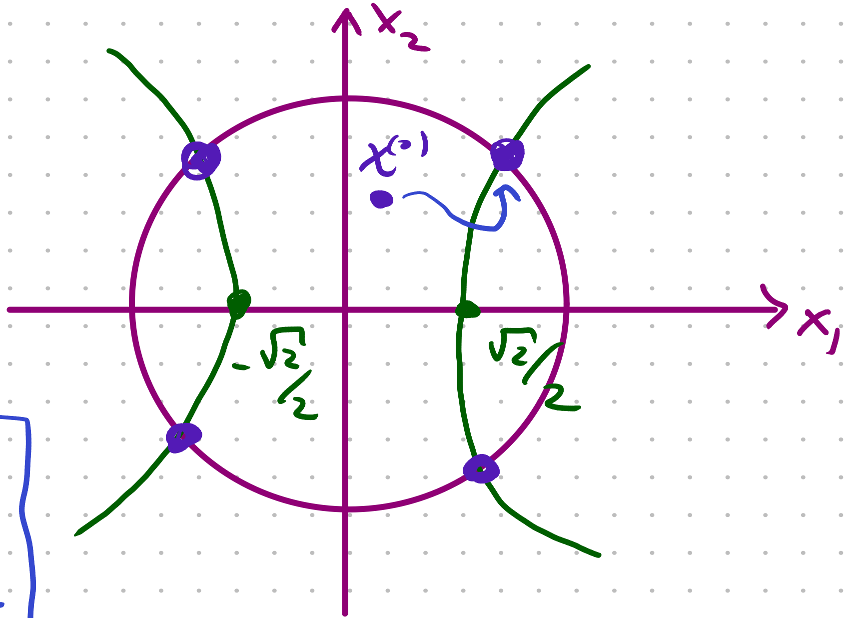
<u>Jacobian</u>: $J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$, $[J_f(x)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

Θέλουμε $\det(J_f(x)) \neq 0 \quad \forall x^{(k)}$

$$\boxed{x^{(k)} = x^{(k-1)} - [J_f(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)})} \quad \text{(N-R)}$$

Παράδειγμα :

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=1 \\ x_1^2-x_2^2=1/2 \end{cases}$$



$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{x}) = f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2+x_2^2-1 \\ x_1^2-x_2^2-1/2 \end{bmatrix}$$

$$J_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(J_f(\vec{x})) = -4x_1x_2 - 4x_1x_2 = -8x_1x_2$$

$\exists [J_f(\vec{x})]^{-1}$ αν $x_1x_2 \neq 0$

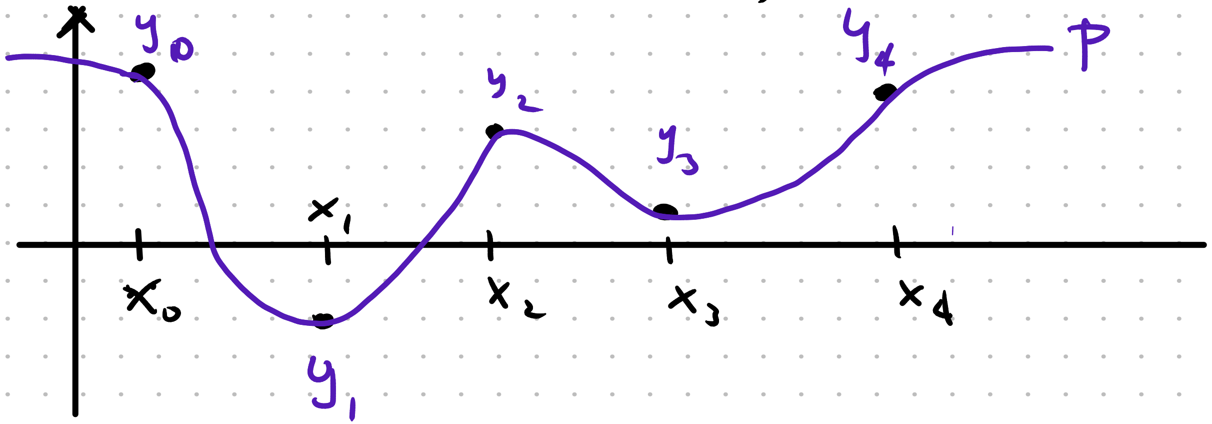
$$[J_f(x)]^{-1} = \frac{-1}{8x_1x_2}\begin{bmatrix} -2x_2 & -2x_2 \\ -2x_1 & 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4x_1} & \frac{1}{4x_1} \\ \frac{1}{4x_2} & -\frac{1}{4x_2} \end{bmatrix}$$

Μέθοδος N-R:

$$\vec{X}^{(k)} = \vec{X}^{(k-1)} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4x_1^{(k-1)}} & \frac{1}{4x_1^{(k-1)}} \\ \frac{1}{4x_2^{(k-1)}} & -\frac{1}{4x_2^{(k-1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_1^{(k-1)}]^2 + [x_2^{(k-1)}]^2 - 1 \\ [x_1^{(k-1)}]^2 - [x_2^{(k-1)}]^2 - 1/2 \end{bmatrix}$$

$\vec{X}^{(0)}$ τυχαίο αλλά χωρίς μηδενικό στοιχείο.

Παρεμβολή $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad f(x_j)$ γνωστά



Ψάχνουμε $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τ.ω.

$p(x_j) = f(x_j)$

και $p(x) \approx f(x)$

Πολυωνυμική Παρεμβολή

$P_n \in \mathbb{P}_n[\alpha, b]$ $\qquad P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0$

$$\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Θέλουμε

$$P_n(x_j) = f(x_j) = y_j$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{Μοναδική λύση}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Υπάρχει δυσκολία όταν $n \gg 1$

Ψάχνουμε μια βάση για τα πολυώνυμα n-βαθμού στο $[\alpha, b]$.

$$L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad L_j \in \mathbb{P}_n[\alpha, b], \quad j = 0, \dots, n$$

$$\forall P_n(x) \in \mathbb{P}_n[\alpha, b] \qquad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} w_j L_j(x)$$

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} w_j L_j(x_i) = w_i = y_i$$

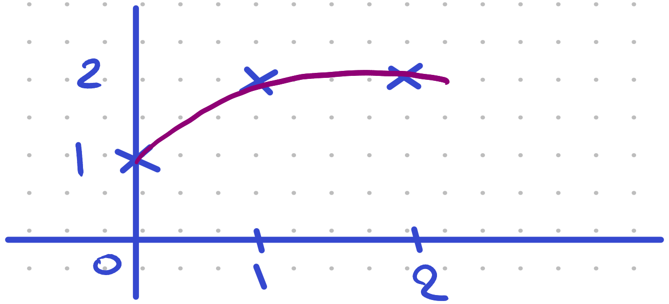
άρα

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$$

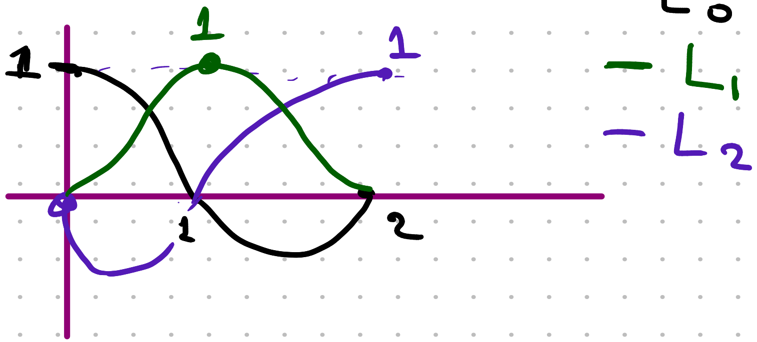
$$L_j(x) = \frac{\prod_{i=0,\, j\neq i}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0,\, j\neq i}^{n} (x_j - x_i)} \qquad \text{(Πολυώνυμα Lagrange)}$$

Παράδειγμα: $x_0=0, \quad x_1=1, \quad x_2=2$

$y_0=1, \quad y_1=2, \quad y_2=2$



$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$



$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-2)}{-1} = x(2-x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= L_0(x) + 2L_1(x) + 2L_2(x)$$

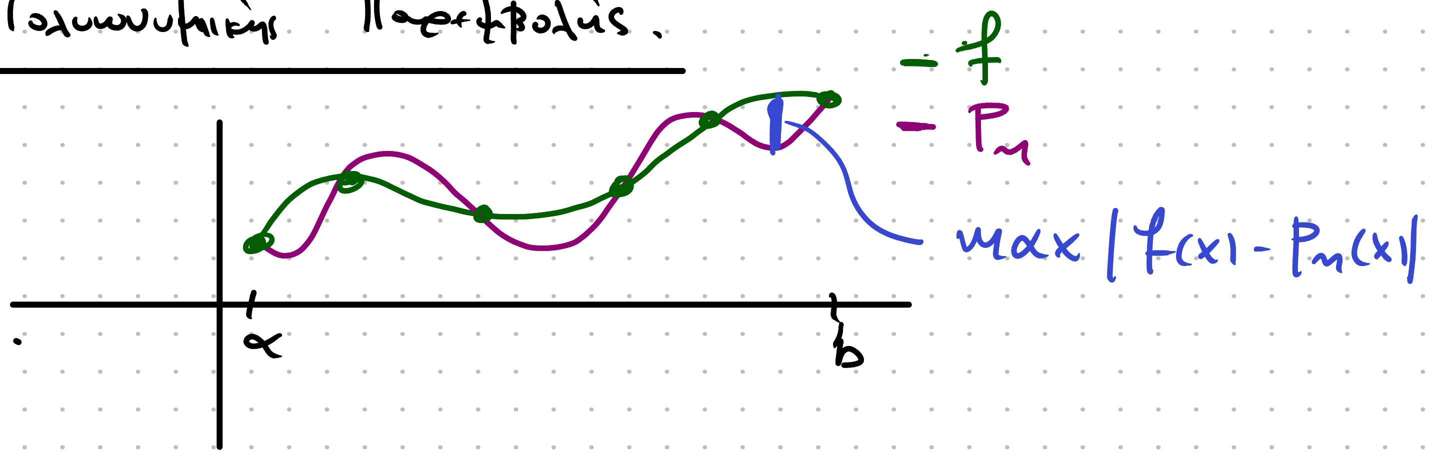
$P_n(x_1) = y_1$

$P_n(x_2) = y_2$

$P_n(x_3) = y_3$

Εκτίμηση Σφάλματος της Πολυωνυμικής Παρεμβολής.

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)-P_n(x)| =:$$



Έστω $f\in C^{n+1}([a,b])$

Θα δ.ο. $\forall x\in[a,b]\ \exists \xi\in(a,b)$ τ.ω. $$f(x)-P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n} (x-x_j)$$

Απόδειξη:

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

ορίζουμε $$\varphi(t) = f(t)-P_n(t) - \frac{f(x)-P(x)}{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}\prod_{j=0}^{n}(t-x_j)$$ για $x\ne x_i$, $i=0,\dots,n$

$\forall t\in[a,b]$

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\cancel{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}} \cancel{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)} = 0$$

$\varphi(x_i) = 0, \quad i=0,\dots,n$

άρα φ έχει $(n+2)$ - μηδενισμούς

$\xrightarrow{\text{Από Θ. Rolle}}$ φ' $(n+1)$ - μηδενισμούς $\Rightarrow$ φ'' (n) - μηδεν. $\Rightarrow$ $\varphi^{(n+1)}$ τουλάχιστον 1 μηδενισμό

άρα $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{f(x)-p(x)}{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)} \left[\prod_{j=0}^{n}(t-x_j)\right]^{(n+1)}$$

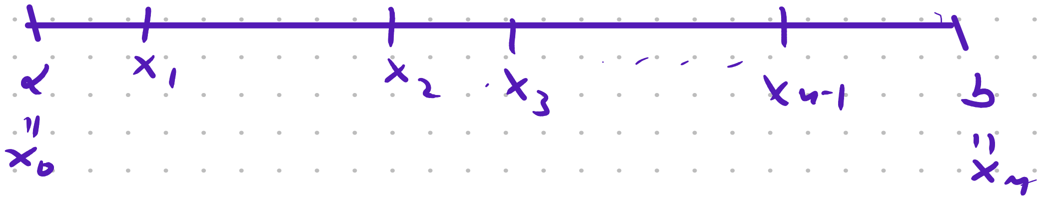
$$\left[\prod_{j=0}^{n}(t-x_j)\right]^{(n+1)} = \left[t^{n+1} + \text{πολυώνυμο } (n)\text{-βαθμού}\right]^{(n+1)} =$$

$$= \left(t^{n+1}\right)^{(n+1)} = \left(\left[t^{n+1}\right]'\right)^{(n)} = \left((n+1)t^{n}\right)^{(n)} = \dots = (n+1)!$$

άρα $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - \dfrac{f(x)-p_n(x)}{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}\,(n+1)!$

άρα $f(x) - p_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$ όπου $x \neq x_j,\ j=0,\dots,n$

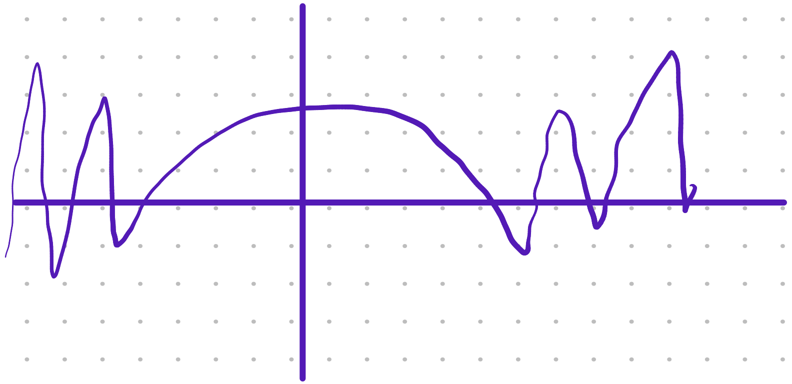
άρα $\forall x \in (a,b]$ $|f(x)-p_n(x)| \leq \dfrac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}|x-x_j|$



$h = \max_{j=0,\dots,n-1} |x_{j+1}-x_j|$

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-p_n(x)| \leq \frac{\max_x |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\max_x \prod_{j=0}^{n}|x-x_j| \leq \frac{(b-a)^n}{(n+1)!}\max_{x\in(a,b)}|f^{(n+1)}(x)|$$

Runge's function $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$



$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \le x \le b} \left| f(x) - P_n(x) \right| = \infty$$