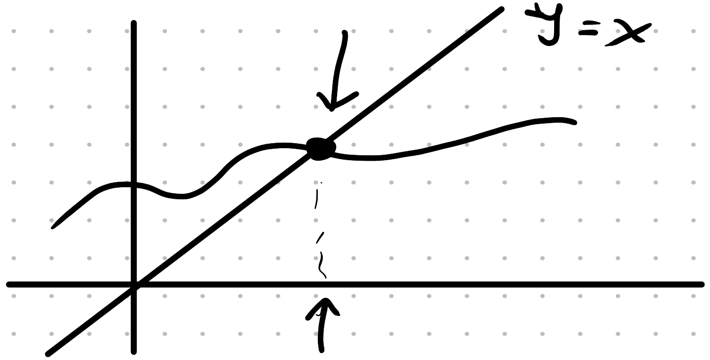
Μέθοδος Jacobi, Gauss

$\sin x = x$ Επαναληπτική



Σταθερό σημείο μιας συνάρτησης φ. $\varphi(x) = x$

$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)})$, $x^{(k)} \to x^*$ τω $\varphi(x^*) = x^*$

$x^{(0)}$ τυχαίο

$\varphi(x) = \sin x$ $x^{(1)} = \sin(0.1)$

$x^{(0)} = 0.1$

φ πρέπει να είναι συστολή $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|$, $L \in [0,1)$

$\forall x, y \in [\alpha, b]$

<u>Πρόταση</u>: Αν η φ είναι $C([\alpha,b])$ και παραγωγίσιμη στο (α,b) και $\exists L\in[0,1)$ τ.ω $|\varphi'(x)|\le L<1$ $\forall x\in(\alpha,b)$ τότε η φ είναι <u>συστολή</u> στο $[\alpha,b]$.

<u>Αποδ.</u>: $\exists\, \xi\in(x_1,x_2)$ τ.ω

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=\varphi'(\xi)(x_1-x_2) \Rightarrow |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=|\varphi'(\xi)||x_1-x_2|\le$$

$$\le L|x_1-x_2|$$ άρα φ συστολή

<u>Παράδειγμα</u>: $\sin x=x$, $x\in(0.1,\ 0.8)$

$\varphi(x)=\sin x$ $\qquad$ $\varphi'(x)=\cos x$

$|\varphi'(x)|=|\cos x|<1$ στο $(0.1,\ 0.8)$ άρα φ είναι συστολή.

Θεώρημα Τοπικής Σύγκλισης

$\varphi : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ και $x^* \in (\alpha, b)$ σταθερό σημείο της φ. $\left(\varphi(x^*) = x^*\right)$

και επιπλέον $|\varphi'(x^*)| < 1$

Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω αν $x^{(0)} \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [\alpha, b]$

η $x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)})$, συγκλίνει στο x^*.

Αποδ.:

$$\lim_{x \to x^*} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} = \varphi'(x^*)$$

$\exists \delta > 0$ τ.ω $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [\alpha, b]$

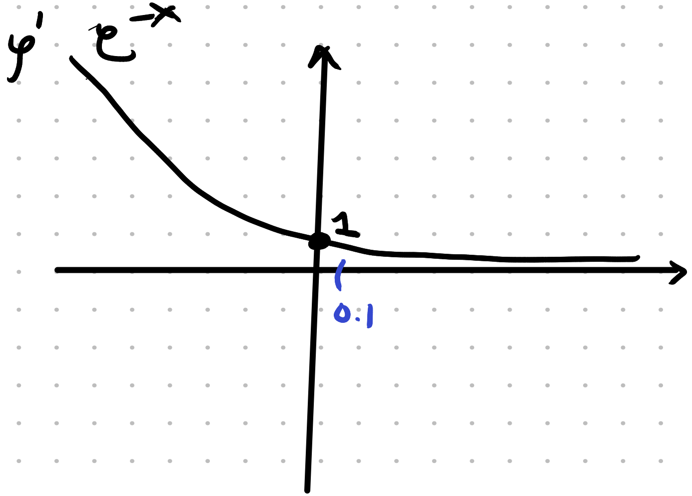
$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} = \varphi'(\xi) \Rightarrow \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x^*)}{x - x^*} \right| < 1$$

Παράδειγμα:

$e^{-x} = x$ στο $[0.1, +\infty)$

$\varphi(x) = e^{-x}$

ψάχνουμε το $x^* \in [0.1, +\infty)$ τ.ω. $\varphi(x^*) = x^*$



$\varphi'(x) = -e^{-x} \Rightarrow |\varphi'(x)| = e^{-x} < 1$

άρα η φ είναι συστολή

οπότε η $x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)})$, $x^{(0)} \in [0.1, +\infty)$ συγκλίνει στο x^*.

Π.χ. $x^{(0)} = 1$

$x^{(1)} = \varphi(x^{0}) = e^{-1} = 0.367$

$x^{(2)} = \varphi(x^{(1)}) = e^{-0.367} = 0.692$

$x^{(3)} = \varphi(x^{(2)}) = e^{-0.692} = 0.5$

$x^{(4)} = \varphi(x^{(3)}) = e^{-0.5} = 0.606$

$x^{(5)} = \varphi(x^{(4)}) = e^{-0.606} = 0.545$

$\vdots$

$x^{(k)} \approx 0.56\ldots$

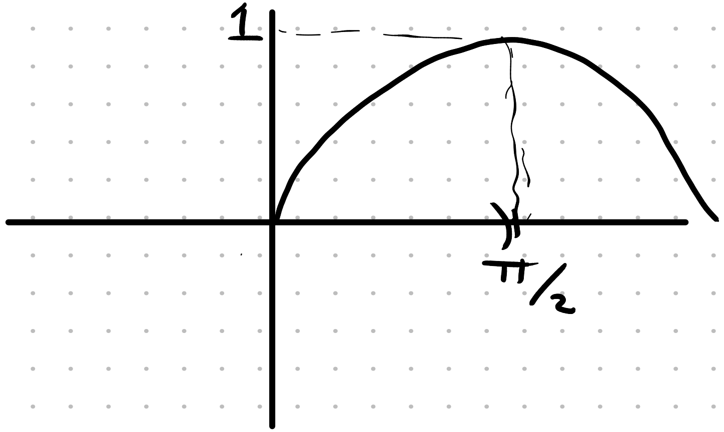
Παράδειγμα

$\cos x - x = 0 \quad , x \in (0, \pi/2) \iff \cos x = x$

$\varphi(x) = \cos x$

$\varphi'(x) = -\sin x \Rightarrow |\varphi'(x)| < 1 \quad \forall x \in (0, \pi/2)$

άρα η φ είναι συστολή



$x^{(0)} = \pi/4 \qquad x^{(1)} = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vdots$

$x^{(k)} \simeq 0.74$

Ταχύτητα / Τάξη σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων

→ Τουλάχιστον τάξη σύγκλισης 1.

αν $\exists L \in [0,1)$ τω

$$|x^{(k)} - x^*| \leq L\,|x^{(k-1)} - x^*|$$

→ Τουλάχιστον τάξη σύγκλισης $m \in \mathbb{N}$

$$|x^{(k)} - x^*| \leq L\,|x^{(k-1)} - x^*|^m$$

Όσο μεγαλώνει το m η μέθοδος συγκλίνει πιο γρήγορα!

πχ
$m=2$ και έστω αφού από 10 βήματα $|x^{(10)} - x^*| = 0.1$, και έστω $L = \frac{1}{2}$

Τότε $|x^{(11)} - x^*| \leq \frac{1}{2}\,0.1^2 = \frac{0.01}{2} = 0.005$

→ Ακριβώς $m \in \mathbb{N}$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k)} - x^*|}{|x^{(k-1)} - x^*|^m} = \ell > 0$$

Μέθοδος Newton-Raphson * (N-R)

$f(x)=0$ Ψάχνουμε τις ρίζες της f

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{f(x)}{\lambda(x)}=0, \text{ όπου } \lambda(x)\neq 0 \Leftrightarrow x = x-\frac{f(x)}{\lambda(x)}$$

ορίζουμε $\varphi(x;\lambda) = x - \dfrac{f(x)}{\lambda(x)}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \varphi(x;\lambda)=x$$

(ή έστω $f'(x^{(k)})\neq 0$)

Εάν $\exists f'(x)$ και $f'(x)\neq 0$ τότε μπορώ να επιλέξω $\lambda(x)=f'(x)$

$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, η επαν. μέθοδος είναι $x^{(k)}=\varphi(x^{(k-1)})$, $x^{(0)}$ αρχική προσέγγιση

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}, \quad x^{(0)} \text{ αρχική προσέγγιση.}$$

Παράδειγμα : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $\quad x_1^* = 1 \quad x_2^* = 3$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή x^* σ.ω $f(x^*) = 0$.

Αριθμητικό σχήμα N-R.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{[x^{(k-1)}]^2 - 4x^{(k-1)} + 3}{2x^{(k-1)} - 4}, \quad x^{(0)} = 1$$

$$\boxed{x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}, \quad x^{(0)} \text{ δοσμένο.}}$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Έστω $\exists f''$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{\cancel{[f'(x)]^2} - \cancel{[f'(x)]^2} + f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*) f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0 \Rightarrow |\varphi'(x^*)| < 1$$

άρα από το <u>Θεώρημα τοπικής σύγκλισης</u> $\exists \delta > 0$ τ.ω.

αν $x^{(0)} \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ η μέθοδος N-R να συγκλίνει στο x^*.

Θεώρημα (Τοπικής σύγκλισης μεθόδου N-R)

Έστω f μια συνάρτηση 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή απλής ρίζας x^*

Τότε $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. αν $x^{(0)} \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ η μέθοδος N-R συγκλίνει στο x^*

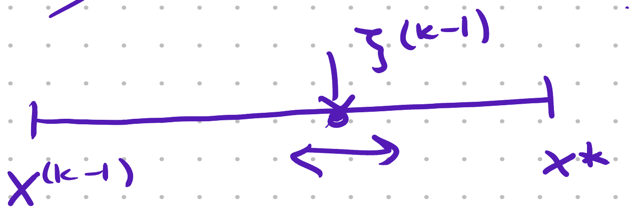
και $\exists\, C > 0$ τ.ω. $|x^{(k)} - x^*| \leq C|x^{(k-1)} - x^*|^2$ (Τετραγωνική σύγκλιση)

Αποδ.:

(Ανάπτυγμα Taylor: $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} + \dots$)

$$f(x^{(k-1)}) = f(\underbrace{x^{(k-1)} - x^*}_{h} + x^*) = \cancel{f(x^*)}^{\,0} + (x^{(k-1)} - x^*) f'(x^*) + \frac{(x^{(k-1)} - x^*)}{2} f''(\xi^{(k-1)})$$

όπου $\xi^{(k-1)} \in (x^{(k-1)}, x^*)$



$$f'(x^{(k-1)}) = f'(\underbrace{x^{(k-1)} - x^*}_{h} + x^*) = f'(x^*) + (x^{(k-1)} - x^*) f''(\eta^{(k-1)})$$

όπου $\eta^{(k-1)} \in (x^{(k-1)}, x^*)$

$$\left(g = f', \quad g(x^{(k-1)}) = g(x^*) + (x^{(k-1)} - x^*) g'(\eta^{(k-1)}) \right)$$

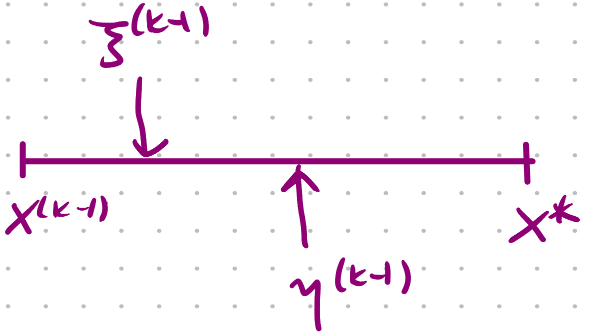
$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} = x^{(k-1)} - \frac{(x^{(k-1)} - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x^{(k-1)} - x^*)^2 f''(\xi^{(k-1)})}{f'(x^*) + (x^{(k-1)} - x^*) f''(\eta^{(k-1)})}$$

αφαιρώ το x^* από τα δύο μέλη και βγάζω κοινό παράγοντα το $(x^{(k-1)} - x^*)$ στο δεξί μέλος.

$$x^{(k)} - x^* = (x^{(k-1)} - x^*) \left[1 - \frac{f'(x^*) + \frac{1}{2}(x^{(k-1)} - x^*) f''(\xi^{(k-1)})}{f'(x^*) + (x^{(k-1)} - x^*) f''(\eta^{(k-1)})} \right]$$

$$x^{(k)} - x^* = (x^{(k-1)} - x^*)\, \frac{\cancel{f'(x^*)} + (x^{(k-1)} - x^*) f''(y^{(k-1)}) - \cancel{f'(x^*)} - \frac{1}{2}(x^{(k-1)} - x^*) f''(\xi^{(k-1)})}{f'(x^*) + (x^{(k-1)} - x^*) f''(y^{(k-1)})}$$

$$= (x^{(k-1)} - x^*)^2\, \frac{f''(y^{(k-1)}) - \frac{1}{2} f''(\xi^{(k-1)})}{f'(x^*) + (x^{(k-1)} - x^*) f''(y^{(k-1)})}$$



γνωρίζουμε ότι $x^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} x^*$ για $x^{(0)} \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$

άρα $x^{(k-1)} \xrightarrow{k \to \infty} x^* \implies \xi^{(k-1)} \to x^*$ και $y^{(k-1)} \to x^*$

άρα

$$|x^{(k)} - x^*| \leq C\, |x^{(k-1)} - x^*|^2 \quad \text{όπου} \quad C = \left| \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*) + 0 \cdot f''(x^*)} \right| = \left| \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)} \right|$$

Το C είναι ανεξάρτητο του k.

Έχουμε εξασφαλίσει τοπική τετραγωνική σύγκλιση γύρω από το x^*.

<u>Παράδειγμα</u>: $x^2 - 4x + 3 = 0$. $\quad x_1^* = 1 \;, \; x_2^* = 3$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad f'(x) = 2x - 4 \qquad f''(x) = 2$$

$$|x^{(k)} - x^*| \leq \left| \frac{2}{2(2x^* - 4)} \right| |x^{(k-1)} - x^*|^2 = \frac{1}{|2x^* - 4|} |x^{(k-1)} - x^*|^2$$

Εάν $x^{(0)} = 1.2 \qquad C = \dfrac{1}{|2 \cdot 1 - 4|} = \dfrac{1}{2}$
