Διάλεξη 11: Αριθμητική Επίλυση μη-γραμμικών Εξισώσεων.

Παράδειγμα $x^2 e^x - x + 1 = 0$, Εύρεση ριζών.

$x^{(0)}$ τυχαίο $\to x^{(1)} \to x^{(2)} \to x^{(3)} \to \dots \to x^{(n)}$

$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$ τ.ω $f(x^*) = 0$

Ορισμοί: Έστω $I \subset \mathbb{R}$

$C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \,/\, f$ συνεχής στο $I \}$ Εάν $I = [\alpha, b]$ $f \in C([\alpha, b])$

$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I) \}$

Θ.Ε.Τ:

Έστω $f \in C([\alpha, b])$ και $k \in \mathbb{R}$ τ.ω $f(\alpha) < k < f(b)$ Τότε

$\exists$ τουλάχιστον ένα $x^* \in (\alpha, b)$ τ.ω $f(x^*) = k$.

Θεώρημα του Bolzano (ειδική περίπτωση $k=0$)

Έστω $f \in C([\alpha,b])$ τ.ω. $f(\alpha)\cdot f(b) < 0$ τότε $\exists$ τουλάχιστον ένα $x^* \in (\alpha,b)$ τ.ω. $f(x^*)=0$.

Μέθοδος της διχοτόμησης

$f \in C([\alpha,b])$ και

① $f(\alpha)\cdot f(b) < 0$

② $f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)\cdot f(\alpha) > 0 \Rightarrow$ περιορίζω το διάστημα στο $\left[\frac{\alpha+b}{2}, b\right]$

$f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)\cdot f(b) < 0$

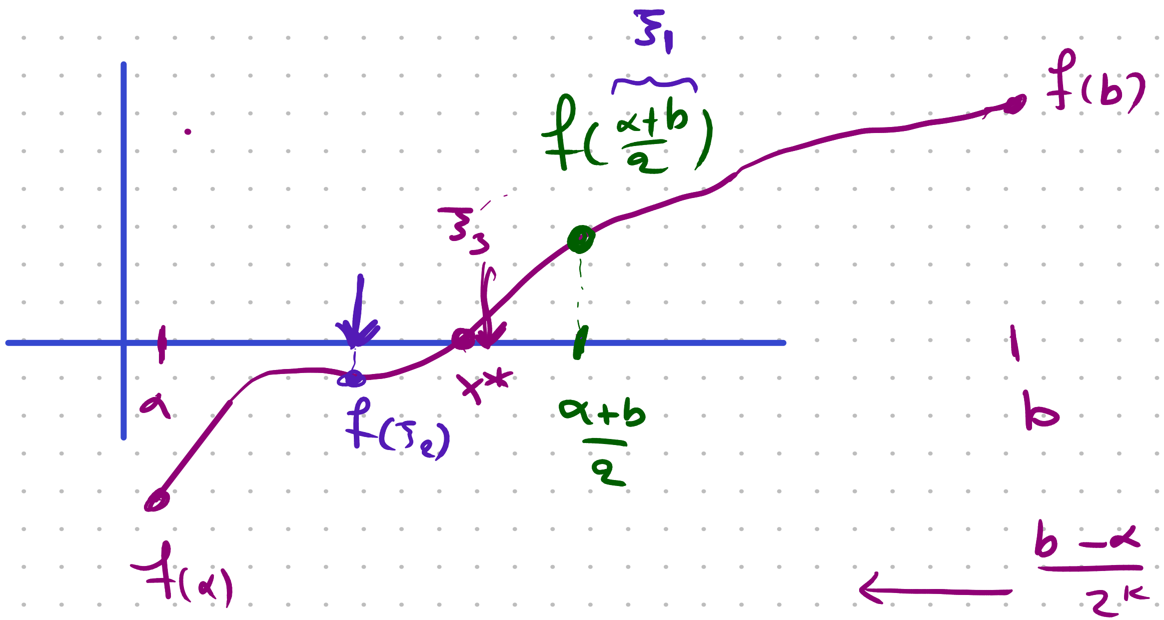
$\downarrow$

$\left[\frac{\alpha+b}{2}, b\right]$

αλλιώς αν $f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)\cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow$ περιορίζω το διάστημα στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+b}{2}\right]$

αλλιώς $x^* = \frac{\alpha+b}{2}$

③ επαναλαμβάνω τη διαδικασία εφόσον $x^* \neq \frac{\alpha+b}{2}$

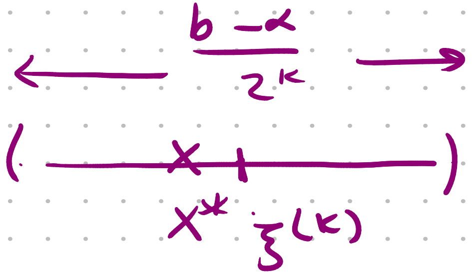


Μετά από k - βήματα

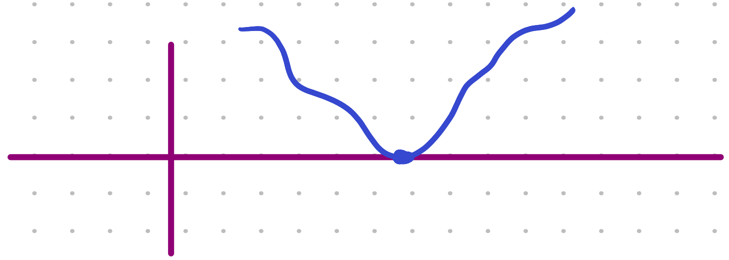
$$|\xi^{(k)} - x^*| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \xi^{(k)} = x^*.$$

k-οστό βήμα



Εφαρμόζεται για κάθε συνάρτηση με μια ρίζα.



← δεν εφαρμόζεται η μέθοδος της διχοτόμησης.

$\nexists\, [a,b] \subset \mathbb{R}$ τ.ω. $f(a)\cdot f(b)<0$

Παράδειγμα: $f(x) = x$, $x \in [-1, 2]$

Πόσες επαναλήψεις χρειάζονται με την μέθοδο της διχοτόμησης έτσι ώστε το σφάλμα να είναι το πολύ 10^{-2}.

Λύση

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{3}{2^{k+1}} \leq 10^{-2} \Rightarrow 2^{k+1} \geq \frac{100}{3}$$

$$(k+1)\ln 2 \geq \ln\left(\frac{100}{3}\right)$$

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{100}{3}\right)}{\ln 2} - 1$$

Επιλέγω τον επόμενο ακέραιο

$$\left[\frac{\ln\left(\frac{100}{3}\right)}{\ln 2} - 1\right] + 1$$

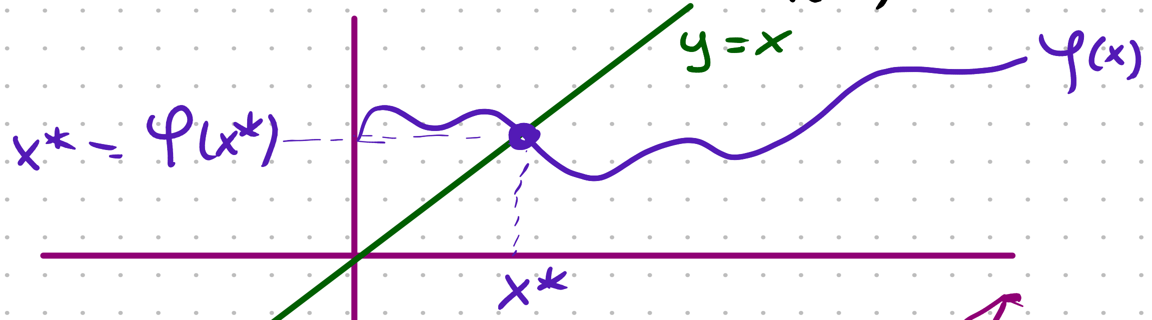
Προβλήματα Εύρεσης Σταθερού Σημείου

$f \in C(I)$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε την ρίζα x^* της f.

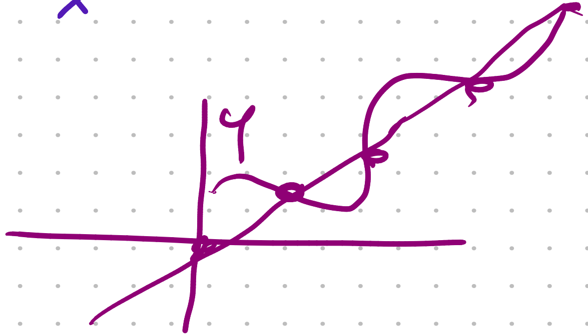
$$f(x^*) = 0 \iff -f(x^*) = 0 \overset{\text{έστω } \lambda(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}}{\iff} -\frac{f(x^*)}{\lambda(x^*)} = 0 \iff x^* - \frac{f(x^*)}{\lambda(x^*)} = x^*$$

Ορίζουμε $\varphi(x;\lambda) = x - \dfrac{f(x)}{\lambda(x)} = \varphi(x)$

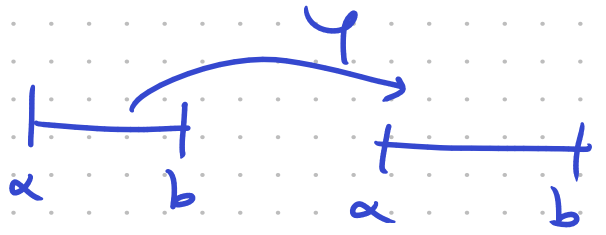


$$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x$$

Το x^* καλείται σταθερό σημείο της φ.



Θεώρημα Σταθερού Σημείου



Έστω $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi \in C([a,b])$

Τότε η φ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο x^*

δηλαδή $\exists\, x^*$ τ.ω. $\varphi(x^*) = x^*$.

Αποδ.

Έστω $\varphi(a) = a$ ή $\varphi(b) = b$ τότε ισχύει.

Άρα χ.β.γ. $\varphi(a) \in (a,b]$, $\varphi(b) \in [a,b)$

ορίζουμε $g(x) = \varphi(x) - x$.

$g(a) = \varphi(a) - a > 0$, $g(b) = \varphi(b) - b < 0$

Άρα από Bolzano $\exists\, x^*$ τ.ω. $g(x^*) = \varphi(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow \varphi(x^*) = x^*$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $\varphi : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **συστολή** αν $\exists L \in [0,1)$ τω

$$\forall x, y \in [\alpha, b] \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y|$$

Θεώρημα: Έστω $\varphi : [\alpha, b] \to [\alpha, b]$ συστολή.
Τότε $\exists$ μοναδικό $x^* \in [\alpha, b]$ τω $\varphi(x^*) = x^*$.
Επιπλέον $x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)})$, $x^{(0)}$ τυχαίο σημείο στο $[\alpha, b]$ συγκλίνει στο x^*.

$$\left(x^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} x^*\right)$$

Απόδ:

$m > n$, $m, n \in \mathbb{Z}$

$$|x^{(m)}-x^{(n)}| = |x^{(m)} - x^{(m-1)} + x^{(m-1)} - \dots + x^{(n+1)} - x^{(n)}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \quad (*)$$

$$|x^{(k)}-x^{(k-1)}| = |\varphi(x^{(k-1)}) - \varphi(x^{(k-2)})| \leq L|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}| = L|\varphi(x^{(k-2)}) - \varphi(x^{(k-3)})|$$

$$\leq L^2 |x^{(k-2)} - x^{(k-3)}| \leq \dots \leq L^{k-n} |x^{(n)} - x^{(n-1)}| \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow |x^{(m)} - x^{(n)}| \leq \sum_{k=n+1}^{m} L^{k-n} |x^{(n)} - x^{(n-1)}| = |x^{(n)} - x^{(n-1)}| \sum_{k=n+1}^{m} L^{k-n} =$$

$$= |x^{(n)} - x^{(n-1)}| L \sum_{k=0}^{m-n-1} L^k = |x^{(n)} - x^{(n-1)}| L \frac{1-L^{m-n}}{1-L} \quad (***)$$

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| = |\varphi(x^{(n-1)}) - \varphi(x^{(n-2)})| \leq L |x^{(n-1)} - x^{(n-2)}| \leq \dots \leq L^{n-1} |x^{(1)} - x^{(0)}|$$

$$(****)$$

$\circledast\!\circledast\!\circledast + \circledast\!\circledast\!\circledast\!\circledast \Rightarrow |x^{(m)} - x^{(n)}| \le L^n \dfrac{1 - L^{m-n}}{1 - L} |x^{(1)} - x^{(0)}| =$

$$= \frac{L^n - L^m}{1 - L} |x^{(1)} - x^{(0)}| \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

Άρα η $x^{(k)}$ είναι ακολουθία Cauchy $\Rightarrow x^{(k)} \to x^*$

$$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* = \lim_{k\to\infty} \varphi(x^{(k-1)}) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x^{(k-1)}) = \varphi(x^*)$$

Άρα το όριο είναι το σταθερό σημείο της φ.

Το x^* είναι μοναδικό σταθερό σημείο της φ.

Μοναδικότητα

Έστω x^* και x^{**} σταθερά σημεία της φ με $x^* \ne x^{**}$

$\varphi(x^*) = x^*$, $\varphi(x^{**}) = x^{**}$

$$|x^* - x^{**}| = |\varphi(x^*) - \varphi(x^{**})| \leq L|x^* - x^{**}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\vee}{0}}{(1-L)} \underbrace{|x^* - x^{**}|}_{>0} \leq 0 \quad \text{άτοπο.}$$

Τέλος από (***) $\overset{m>n}{\Rightarrow}$ $$|x^{(m)} - x^{(n)}| \leq L \frac{1-L^{m-n}}{1-L} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

για $m \to \infty$ $\quad x^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} x^*$

$$\boxed{|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|}$$

Εκτίμηση σφάλματος στο n-βήμα.

$L \in [0,1)$

— Στα γραμμικά συστήματα είχαμε

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq \frac{\|G\|}{1-\|G\|} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \quad , \quad \|G\| < 1$$