Διάλεξη 10

$\mathbb{R}_+^{n\times n}$ με αθροίσματα γραμμών μονάδες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \|A\|_\infty = 1$$

$\rho(A)$;

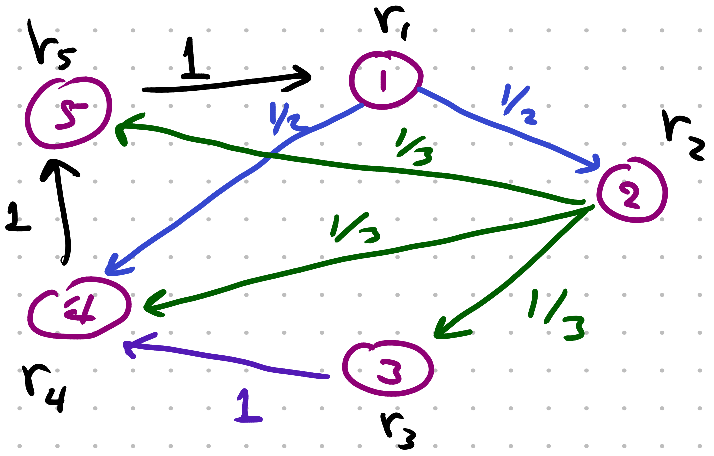
$$\left.\begin{array}{l} \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\| \\ \forall \|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \rho(A) \leq 1 \quad \text{ή} \quad \max_j |\lambda_j| \leq 1$$

έστω $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$A\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} = 1 \cdot \mathbb{1} \Longrightarrow \max_j |\lambda_j| = 1 \Rightarrow \rho(A) = 1.$$

Αλγόριθμος Pagerank (Google)

Κατευθυνόμενος Γράφος



Ορίζουμε το διάνυσμα $r \in \mathbb{R}^5_+$ το οποίο θα καλείται διάνυσμα σημαντικότητας καθε αποτελέσματος

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = r_5$$

$$r_2 = \frac{r_1}{2}$$

$$r_3 = \frac{r_2}{3}$$

$$r_4 = \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{3} r_2 + r_3$$

$$r_5 = r_4 + \frac{1}{3} r_2$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{A^T} \overbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}}^{r} = \overbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}}^{r} \iff r^T A = r^T$$

όπου A ένα αθροιστικά γραμμών μονάδα.

Ο A^T έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον A.

$\rho(A^T) = 1$

Εύρεση του r με τη μέθοδο των δυνάμεων.

$r^{(0)}$ τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$

$$r^{(k)} = \frac{(A^T)^k r^{(0)}}{\|(A^T)^k r^{(0)}\|_2}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, A^T r^{(k)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}$$

$r^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} r$ αν $(r^{(0)}, r) \neq 0$

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Έστω $S' = \alpha A + (1-\alpha)\mathbb{1} z^T$, $\alpha \in [0,1]$ με $\sum_{j=1}^{n} z_j = 1$, $z_j \geq 0$

α: damping factor

z: personalization.

$$\underset{n \times n}{\mathbb{1} z^T} = \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{1\times n}{\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & & & \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

$$S' = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{A} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ & \ddots & & \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

άθροισμα της i γραμμής του S' είναι $\alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\cdot 1 = 1$.

Άρα μπορώ να ορίσω την σημαντικότητα $r \in \mathbb{R}^n$ με βάση το S'^T

$$r^{(k)} = \frac{(S^T)^k r^{(0)}}{\|(S^T)^k r^{(0)}\|_2} \xrightarrow{k \to \infty} r$$

Στη πράξη $\underline{n >> 1}$