Αριθμητική Ανάλυση – Διάλεξη 1.

→ Αριθμητικές Μεθόδους για την Προσέγγιση λύσεων πολύπλοκων μαθηματικών προβλημάτων στον Η/Υ

→ Μαθηματική Θεμελίωση των αριθμητικών μεθόδων + Υλοποίηση Αλγορίθμων στην Python

Παραδείγματα.

1. Αριθμητική Επίλυση γραμμικών συστημάτων.

$$Ax = b \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad x \in \mathbb{R}^{n} \quad b \in \mathbb{R}^{m}$$

εύρεση του x.

2. Λύση Διαφορικών Εξισώσεων.

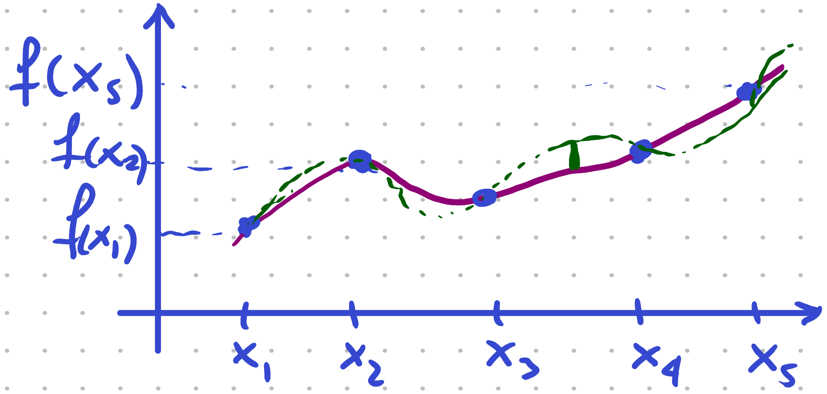
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$ (Κυματική Εξίσωση στην 1 διάσταση).

3. Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός Πίνακα A, $Ax = \lambda x$ (Εφαρμογή Google-PageRank)

4. Παρεμβολή (Π.χ. Προσέγγιση συνθέτων συναρτήσεων με Πολυώνυμα ή κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad x_1 < x_2 < \dots < x_n$

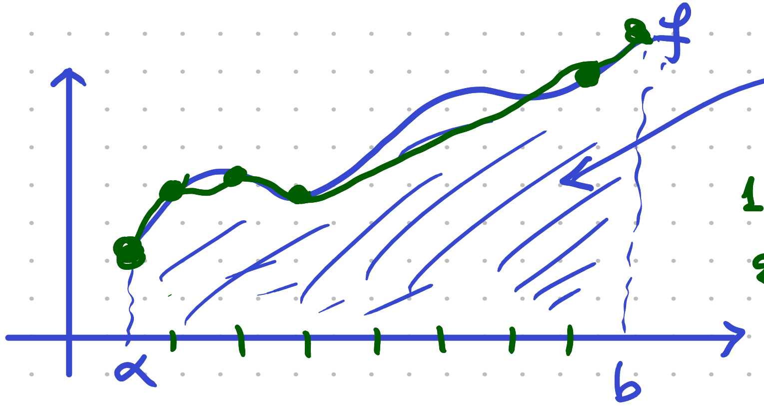
$f(x_1)$ $f(x_2)$ .... $f(x_n)$ γνωστά.



Εκ των προτέρων σφάλματα.

⑤ Αριθμητική Ολοκλήρωση

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

1. Εφαρμόζουμε παρεμβολή
2. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

Αριθμητική Κινητής Υποδιαστολής — Κεφ 1.

Ερώτημα: Μπορούμε να αναπαραστήσουμε στον Η/Υ το π ή το $\sqrt{2}$;

όχι! θα χρειαζόμασταν ∞ μνήμη.

→ Ο Η/Υ δεν μπορεί να αναπαραστήσει όλο το $\mathbb{R}$.

→ Μπορεί να χειριστεί ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο καλείται Σύνολο των αριθμών Μηχανής.

$$x \in \mathbb{R} : x = (-1)^s \cdot (0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_T)_\beta \cdot \beta^E , \quad s \in \{0,1\}, \quad \alpha_j \in \{0,1,\ldots,\beta-1\}$$

$$E \in \{L, L+1, \ldots, U\}, \quad L<0, \quad U>0$$

Πρόβλημα: Μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια αναπαραστάσεις για ένα δοσμένο $x \in \mathbb{R}$

Πχ.

$$0.1 = (-1)^0 \cdot (0.1)_{10} \cdot 10^0$$

$$= (-1)^0 \cdot (0.01)_{10} \cdot 10^1$$

Υποθέτουμε επιπλέον $\alpha_1 > 0$

$$\mathbb{F}(\beta,T,L,U) = \Big\{ x\in\mathbb{R} : x = (-1)^s\cdot(0.\alpha_1\cdots\alpha_T)_\beta\cdot\beta^E,\ s\in\{0,1\},\ \alpha_1\in\{1,\dots,\beta-1\},\ \begin{array}{l}\alpha_j\in\{0,1,\dots,\beta-1\},\ j>1\\ E\in\{L,\dots,U\}\end{array}\Big\}\cup\{0\}$$

<u>Δυαδικό σύστημα</u> $\quad \beta = 2,\quad s\in\{0,1\},\quad \alpha_1 = 1,\quad \alpha_j\in\{0,1\},\ j>1$

$$(0.\underset{2^{-1}}{1}\underset{2^{-2}}{0}\underset{2^{-3}}{1})_2 = 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$(0.101)_2\cdot 2^3 = \left(1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}\right)\cdot 2^3 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2^0 = 5$$

<u>Παράδειγμα</u>: $\mathbb{F}(2,3,-1,2)$

$$x = (-1)^s\,(0.1\alpha_2\alpha_3)_2\cdot 2^E$$

<u>Ας γράψουμε τους θετικούς.</u>

$(0.100)_2\,2^{-1} = \frac{1}{4}$ $\qquad (0.100)_2\cdot 2^0 = \frac{1}{2}$ $\qquad (0.100)_2\,2^1 = 1$ $\qquad (0.100)_2\,2^2 = 2$

$(0.110)_2\,2^{-1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ $\qquad (0.110)_2\,2^0 = \frac{3}{4}$ $\qquad (0.110)_2\,2^1 = 3/2$ $\qquad (0.110)_2\,2^2 = 3$

$(0.101)_2 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ ---- $= \frac{5}{8}$ ---- $5/4$ ---- $= 5/2$

$(0.111)_2 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$ ---- $= \frac{7}{8}$ ---- $7/4$ ---- $= 7/2$.

$\# \mathbb{F}(2,3,-1,2) = 33$

<u>Ιδιότητες</u>

① Αν $x \in \mathbb{F}$ τότε $-x \in \mathbb{F}$

② Αν $x \in \mathbb{F}(\beta, T, L, U)$ και $x \neq 0$ τότε $\beta^{L-1} \leq |x| \leq \beta^U (1 - \beta^{-T})$

<u>Απόδ</u>:

$$x_{min} = (0.100\cdots0)_\beta \cdot \beta^L = 1 \cdot \beta^{-1} \cdot \beta^L = \beta^{L-1}$$

$$x_{max} = (0.(\beta-1)(\beta-1)\cdots(\beta-1))_\beta \cdot \beta^U =$$

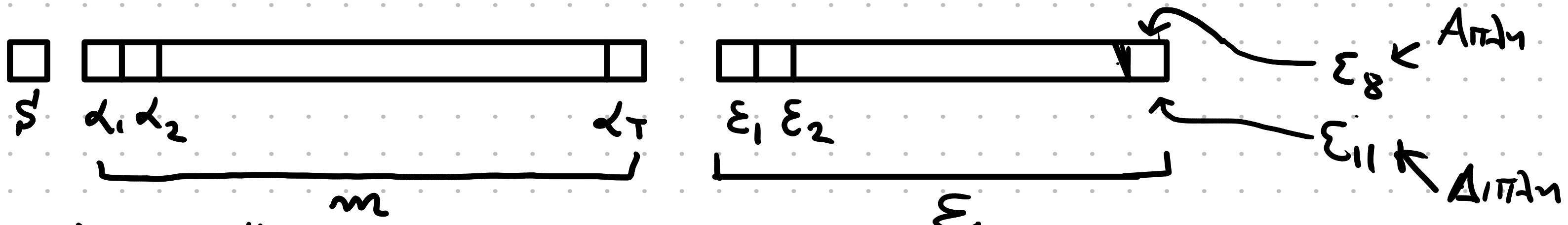
$$= \left[(\beta-1)\beta^{-1} + (\beta-1)\beta^{-2} + \cdots + (\beta-1)\beta^{-T}\right]\beta^{U} = (\beta-1)\sum_{j=1}^{T}\beta^{-j}\cdot\beta^{U} =$$

$$= (\beta-1)\left[\sum_{j=0}^{T}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{j} - 1\right]\beta^{U} = (\beta-1)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{\beta}\right)^{T+1}}{1-\frac{1}{\beta}} - 1\right]\beta^{U} =$$

$$= \left(\cancel{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{T+1}\beta \cancel{-\beta} + 1\right)\beta^{U} = \left(-\beta^{-T-1}\cdot\beta + 1\right)\beta^{U} =$$

$$= \beta^{U} - \beta^{-T+U} = \beta^{U}\left(1-\beta^{-T}\right)$$

Αναπαράσταση στις γλώσσες προγραμματισμού. (συνήθως $\beta=2$)



Απλή ακρίβεια: $32 \text{ bit} = 1 + 23 + \overset{\varepsilon}{8}$

$T = 23$ Το ε έχει 8 στοιχεία

$L = -125$ $U = 128$

Διπλή ακρίβεια 64 bit = 1 + 52 + 11

$T = 52$ Το $\mathcal{E}$ έχει 11 στοιχεία.

$L = -1021$, $U = 1024$

$\mathcal{E} \in \{0, \dots, \underbrace{2^8 - 1}_{255}\}$

$\mathcal{E} \in \{0, \dots, \underbrace{2^{11} - 1}_{2047}\}$

Εύρεση του E (εκθέτη) από το $\mathcal{E}$

$E = L + \mathcal{E} - 1$, $E \in \{-125, \dots, 128\} \to \{1, \dots, 254\}$

$E \in \{-1021, \dots, 1024\} \to \{1, \dots, 2046\}$

Τιμή	E	m
$\pm\infty$	$U+1$	0
0	$L-1$	0
NaN	$U+1$	$\neq 0$

$\pm\infty \to \mathcal{E} = 255$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_T = 0$; $s=1$ $-\infty$, $s=0$ $+\infty$

$0 \to \mathcal{E} = 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_T = 0$

NaN $\to \mathcal{E} = 255$, $\exists j$ τω $\alpha_j = 1$

NaN: Not a Number (πχ. $0/0$, $+\infty \cdot 0$ κτλ)

Παράδειγμα: Θέλουμε να εκτελέσουμε την παρακάτω πράξη σε έναν υπολογιστή με $x \in \mathbb{F}(10,3,-6,6)$

$$(2 - 1.999) \cdot 1000.$$

Στο $\mathbb{R}$: $0.001 \cdot 1000 = 1$ ⟵ Η πραγματική λύση !

Στον Η/Υ :

$$2 \rightarrow (-1)^0 \cdot (0.200)_{10} \cdot 10^1$$

$$1.999 \rightsquigarrow (-1)^0 \cdot (0.199)_{10} \cdot 10^1$$

$$1000 \rightsquigarrow (-1)^0 \cdot (0.100)_{10} \cdot 10^4$$

1η πράξη

$$2 - 1.999 = (0.001) \cdot 10^1 \rightarrow (0.100)_{10} \cdot 10^{-1}$$

2η πράξη

$$(0.100)_{10} \cdot 10^{-1} \cdot (0.100)_{10} \cdot 10^4 = (0.010)_{10} \cdot 10^3 \rightarrow (0.100)_{10} \cdot 10^2 = 10$$

Απόλυτο Σφάλμα = 9