Αριθμητική Ανάλυση – Ασκήσεις για παράδοση

Κώστας Σμαραγδάκης

Άσκηση 1

Εκτελέστε απαλοιφή Gauss (χωρίς εναλλαγές γραμμών) στον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας αριθμητική κινητής υποδιαστολής για ένα υπολογιστή με συνολό αριθμών μηχανής $\mathbb{F}(10, 3, -6, 11)$.

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ποιό θα είναι το σφάλμα προσέγγισης της λύσης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ για το σύστημα $Ax = b$ με $b = [1, 3]^T$;

Άσκηση 2

Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$ και διαμέριση Δ με $x_0 = 0,\ x_1 = 1/2,\ x_2 = 1$. Βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής καθώς και τις προσεγγίσεις της f στους χώρους $S_1(\Delta)$ και $S_3(\Delta)$. Γράψτε τις εκτιμήσεις του σφάλματος που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 3

Για την εύρεση της θετικής ρίζας της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της διχοτόμισης σε οποιαδήποτε διάστημα; Εξηγήστε. Στη συνέχεια, προτείνετε ένα συμβατό αρχικό διάστημα για εφαρμογή της μεθόδου της διχοτόμισης και υπολογίστε πόσες επαναλήψεις θα χρειάστουν για εγγυημένο σφάλμα μικρότερο από 10^{-3}.

Άσκηση 4

Πραγματοποιώντας δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton–Raphson εκτιμήστε την λύση της μη γραμμικής εξίσωσης $e^x = 2e$, έχοντας ως αρχική προσέγγιση της λύσης $x^{(0)} = 0$.

Μπορεί εναλλακτικά να εφαρμοστεί η μέθοδος της διχοτόμισης στο διάστημα $[1, 2]$;

Άσκηση 5

Έστω $x^{(0)} \in (0, 1)$.Ποιου προβλήματος τη λύση προσεγγίζει η ακολουθία $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ η οποία ορίζεται από το επαναλληπτικό σχήμα:

$$x^{(k)} = \frac{1}{2}\cos(x^{(k-1)}).$$

Άσκηση 6

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε μια γλώσσα προγραμματισμού το οποίο θα υλοποιεί τη μέθοδο Newton–Raphson για τη προσέγγιση μιας λύσης μιας εξίσωσης $f(x) = 0$. Το πρόγραμμα θα τυπώνει τις τιμές $k,\ x^{(k)}$, και $f(x^{(k)})$ σε κάθε βήμα. Δεδομένα είναι η αρχική τιμή $x^{(0)}$, την ανοχή σφάλματος $\mathrm{TOL} > 0$ και το μεγιστό πλήθος των επαναλήψεων $\mathrm{KMAX} \in \mathbb{N}$. Ως τελική προσέγγιση θεωρήστε το $x^{(k)}$ για το οποίο για πρώτη φορά ισχύει $\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| < \mathrm{TOL}$ ή το $x^{(\mathrm{KMAX})}$ αν εξαντληθεί ο μέγιστος αριθμός των επαναλήψεων. Εφαρμόστε το πρόγραμμά σας για τα $f(x) = x^3 - 2x - 5,\ x^{(0)} = 5,\ \mathrm{TOL} = 10^{-6},\ \mathrm{KMAX} = 100$.

Άσκηση 7

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού το οποίο θα υλοποιεί τη μέθοδο Jacobi για την επίλυση γραμμικών συστημάτων $Ax = b$, για αντιστρέψιμους πίνακες A με μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Το πρόγραμμα θα τυπώνει τις τιμές k, $x^{(k)}$, και $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_2$ σε κάθε βήμα. Χρησιμοποιήστε ως αρχική προσέγγιση $x^{(0)}$ το μηδενικό διάνυσμα. Εφαρμόστε το πρόγραμμα για το επόμενο γραμμικό σύστημα.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Θεωρήστε ως τελική προσέγγιση το $x^{(k)}$ για το οποίο για πρώτη φορά $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_2 < \mathrm{TOL} < 10^{-3}$. Συνοδεψτέ το πρόγραμμα σας με τη θεωρετική απόδειξη ότι η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε αρχική προσέγγιση $x^{(0)}$.