ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

9η διάλεξη - 14.11.2022

$[0,t]$ $\delta t = \frac{t}{n}$

$t_k = k\delta t$, $k=0,\dots,n$

$n\delta t = t$

$n \to \infty$

$\delta t \to 0$

Έχουμε τους επόμενους κανόνες $T = [0,t]$

- $d[t,t] \doteq (dt)^2 = 0$
- $d[t,W_t] = d[W_t,t] \doteq dt\, dW_t = dW_t\, dt = 0$
- $d[W_t,W_t] \doteq (dW_t)^2 = dt$

$$[f,g] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} (f_{t_{k+1}} - f_{t_k})(g_{t_{k+1}} - g_{t_k})$$ από κοινού τετραγωνική μεταβολή

$$[t,t] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overbrace{t_{k+1} - t_k}^{\delta t})^2 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} n(\delta t)^2 = t \lim_{\delta t\to 0} \delta t = 0$$

$$d[t,t] = 0 = (dt)^2$$

$(W_{t_{n}} = W_t)$

$$[t,W_t] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} (\overbrace{t_{k+1} - t_k}^{\delta t})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \delta t \sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \underbrace{\delta t \cdot (W_t - W_0)}_{\text{Τυχαία μεταβλητή}} = 0 \qquad \delta t W_t \sim N(0, t(\delta t)^2)$$

$$\mathbb{E}[\delta t W_t] = 0 \qquad Var[\delta t W_t] \to 0$$

Γράφουμε $d[t, W_t] = d[W_t, t] = dt\, dW_t = dW_t\, dt = 0$

Απο προηγούμενο μάθημα

$$[W_t, W_t] = t \quad \Rightarrow \quad d[W_t, W_t] = dt = (dW_t)^2$$

Έστω X_t, Y_t στοχαστικές διαδικασίες. Ισχύει

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X_t, Y_t]$$

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx$$

$$[X_t, Y_t] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta t\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}) =$$

$$= \lim \sum_{k=0}^{n-1} \Big[(X_{t_{k+1}} Y_{t_{k+1}} - \underline{X_{t_k} Y_{t_k}}) - \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} (Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}) - \sum_{k=0}^{n-1} Y_{t_k} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \Big]$$

$$\sum X_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$\int X_t \, dW_t$$

Έστω X_t, Y_t στοχαστικές διαδικασίες. Ισχύει

$T = [0,t]$

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + d[X_t, Y_t]$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_{k+1}}Y_{t_{k+1}} - X_{t_k}Y_{t_k}) = X_tY_t - X_0Y_0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum X_{t_k}(Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}) \doteq \int_0^t X_s\,dY_s$$

στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς Y_t

$$\lim_{n\to\infty}\sum Y_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \doteq \int_0^t Y_s\,dX_s.$$

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + [X_t, Y_t]$$

$$d(X_tY_t) = X_t\,dY_t + Y_t\,dX_t + dX_t\,dY_t$$

Παράδειγμα

Θα μελετήσουμε τη τετραγωνική μεταβολή της X_t η οποία ικανοποιεί

$$dX_t = \alpha\, dt + \beta\, dW_t$$

$$d[X_t, X_t] = (dX_t)^2$$

$$(dX_t)^2 = (\alpha\, dt + \beta\, dW_t)^2 = \alpha^2 (dt)^2 + \beta^2 (dW_t)^2 + 2\alpha\beta\, dt\, dW_t$$

$$\left([X_t, X_t] = \alpha^2 [t, t] + \beta^2 [W_t, W_t] + 2\alpha\beta\, [t, W_t] \right)$$

$$(dX_t)^2 = \alpha^2 \cdot 0 + \beta^2 \cdot dt + 2\alpha\beta \cdot 0 = \beta^2 dt = d[X_t, X_t]$$

$$[X_t, X_t] = \beta^2 t$$

Παράδειγμα

Θα μελετήσουμε τη από κοινού τετραγωνική μεταβολή των $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$ οι οποίες ικανοποιούν

$$dX_t^{(1)} = \alpha_1 \, dt + \beta_1 \, dW_t^{(1)} \qquad X_t^{(1)} = \int_0^t \alpha_1 \, ds + \int_0^t \beta_1 \, dW_s^{(1)}$$

$$dX_t^{(2)} = \alpha_2 \, dt + \beta_2 \, dW_t^{(2)}$$

Όπου $\mathrm{Corr}(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}) = \rho \in [-1, 1]$

$$[X^{(1)}, X^{(2)}] = \beta_1 \beta_2 \rho t$$

$$W_t^{(1)}$$

$W_t^{(2)} = \rho W_t^{(1)} + (1-\rho^2)^{1/2} W_t^{(3)}$ όπου $W_t^{(1)}, W_t^{(3)}$ ανεξάρτητες.

$$dX_t^{(1)} dX_t^{(2)} = (\alpha_1 dt + \beta_1 dW_t^{(1)})(\alpha_2 dt + \beta_2 dW_t^{(2)}) =$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \cancel{(dt)^2}^{0} + \alpha_1 \beta_2 \cancel{dt\, dW_t^{(2)}}^{0} + \beta_1 \alpha_2 \cancel{dW_t^{(1)} dt}^{0} + \beta_1 \beta_2\, dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} =$$

$$= \beta_1 \beta_2\, dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} = \beta_1 \beta_2 \left[\rho \left(dW_t^{(1)} \right)^2 + (1-\rho^2)^{1/2} dW_t^{(1)} dW_t^{(3)} \right] =$$

$$= \beta_1 \beta_2 \rho\, dt + \beta_1 \beta_2 (1-\rho^2)^{1/2}\, d\left[W_t^{(1)}, W_t^{(3)} \right]$$

$$\left[W_t^{(1)}, W_t^{(3)} \right] = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta t \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{t_{k+1}}^{(1)} - W_{t_k}^{(1)} \right) \left(W_{t_{k+1}}^{(3)} - W_{t_k}^{(3)} \right)$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{t_{k+1}}^{(1)} - W_{t_k}^{(1)} \right) \left(W_{t_{k+1}}^{(3)} - W_{t_k}^{(3)} \right)$$

$$\mathbb{E}[T_n] = 0 \qquad \mathcal{N}(0, \underline{\delta t}) \qquad \hat{\mathcal{N}}(0, \delta t)$$

$$\operatorname{Var} T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\delta t)^2 = n(\delta t) \cdot \delta t = t\, \delta t \to 0$$

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t, t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t, t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

$$df(x,t) = f_x\,dx + f_t\,dt + \frac{1}{2}f_{xx}\cdot(dx)^2 + \frac{1}{2}f_{tt}\cdot(dt)^2 + f_{xt}\,dx\,dt$$

$$df(X_t,t) = f_x\cdot\left[\mu\,dt + \sigma\,dW_t\right] + f_t\,dt +$$

$$\frac{1}{2}f_{xx}\left[\mu^2\cancel{(dt)^2}^{\,0} + \sigma^2(dW_t)^2 + 2\mu\sigma\,\cancel{dt\cdot dW_t}^{\,0}\right] + \frac{1}{2}f_{tt}\,\cancel{(dt)^2}^{\,0}$$

$$+ f_{x_t} \cancelto{0}{\left(\mu\, dt + \sigma\, dW_t\right) \cdot dt}$$

$$\Rightarrow$$

$$df(X_t, t) = f_x \mu \underline{dt} + f_x \sigma\, dW_t + f_t\, dt + \frac{1}{2} f_{xx} \sigma^2 dt$$

Η αξία μιας μετοχής ακολουθεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

$$dS_t = \underbrace{\mu S_t}_{\tilde{\mu}(S_t)} dt + \underbrace{\sigma S_t}_{\tilde{\sigma}(S_t)} dW_t$$

$$f(x,t) = f(x) = \ln x \quad , \quad f' = \frac{1}{x} \quad f'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$d(\ln S_t) = \left\{ \frac{1}{\cancel{S_t}} \cdot \mu \cancel{S_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{S_t^2}} \sigma^2 \cancel{S_t^2} \right\} dt + \sigma \frac{1}{\cancel{S_t}} \cancel{S_t} dW_t$$

$$\int_0^t d(\ln S_s) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW_s$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\left(W_t - \cancelto{0}{W_0}\right)$$

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$