ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

6η διάλεξη - 31.10.2022

Θα χρειαστούμε τη σύγκληση τυχαίας μεταβλητής με την έννοια της μέσης τετραγωνικής συγκλίσεως.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση (Mean-Square convergence)

$$X_n \xrightarrow{\text{m.s}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

Ορισμός $L^2(\Omega)$

μέτρο πιθανότητας

Με L^2 συμβολίζουμε την οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $X(\omega)$ για τις οποίες ικανοποιείται η συνθήκη $\mathbb{E}[|X|^2] < \infty$ $(\mathbb{E}[X^2] < \infty)$

$\int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2 p(x)\,dx$

Ορισμός $M^2(\Omega)$

Με M^2 συμβολίζουμε την οικογένεια των στοχαστικών συναρτήσεων $f(t,\omega)$ για τις οποίες ικανοποιείται η συνθήκη $\mathbb{E}[\int_0^T |f(t)|^2 dt] < \infty$

$\|X\|_{L^2(\Omega)} = \left(\mathbb{E}[X^2]\right)^{1/2}$, $\|X_t\|_{M^2(\Omega)} = \left(\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 dt\right]\right)^{1/2}$

Νόρμα στοχαστικής διαδικασίας

Έστω στοχαστική διαδικασία $f = f(t, \omega)$, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$, $\omega \in \Omega$ $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$$\|f\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right]$$

- Θα λέμε οτι η ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών συγκλίνει ως προς την παραπάνω νόρμα στην στοχαστική διαδικασία f εάν $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{M^2} = 0$

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{M^2}} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{M^2} = 0$$

Έστω διαμέριση του $\mathbb{T} = [0, T]$ στους χρόνους $t_k = k\delta t, \delta t = T/n$ και η στοχαστική κλιμακωτή συνάρτηση $f_n(t, \omega)$ όπως την προηγούμενη διάλεξη.

Διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα - Στοχαστικές κλιμακωτές συναρτήσεις

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n(t_k, \omega)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

Πρόταση

Για κάθε κλιμακωτή στοχαστική διαδικασία $f_n \in M^2$ το διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα $I_n = I_n(f_n)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή $I_n \in L^2$ και ισχύει

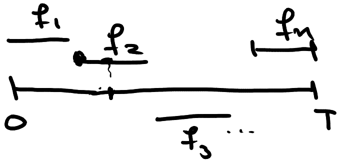
$$\mathbb{E}[|I_n|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |f_n(t)|^2 dt\right]$$

$$\|I_n\|_{L^2} = \|f_n\|_{M^2}$$

$$I_n^2 = \sum_k \sum_\ell f(t_k)\, f(t_\ell)\, (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell})$$

$$\mathbb{E}[I_n^2] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[f^2(t_k)]\,\delta t = \mathrm{Var}(I_n) = \| I_n \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\overline{f}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_n(t_k)\, \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}]}(t)$$



$$f_n^2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} f_n(t_k)\, f_n(t_\ell)\, \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}]}\, \mathbb{1}_{[t_\ell, t_{\ell+1}]} = (*)$$

$$[t_k, t_{k+1}] \cap [t_\ell, t_{\ell+1}] \overset{k \neq \ell}{=} \emptyset$$

εαν $t \in [t_k, t_{k+1}]$

τότε $\underbrace{\mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}]}}_{=1}\ \underbrace{\mathbb{1}_{[t_\ell, t_{\ell+1}]}}_{=0}$

$$\circledast \overset{k=\ell}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f_n^2(t_k)\, \mathbb{1}[t_k, t_{k+1}](t) \qquad \delta t = \frac{T}{n} = t_{k+1} - t_k$$

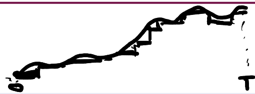
$$\int f^2 dt = \int_0^{t_k} 0 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt + \int_{t_{k+1}}^{T} 0\, dt$$

$$= \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} f_n^2(t_k)\, \mathbb{1}[t_k, t_{k+1}](t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f_n^2(t_k) \underbrace{\int_0^T \mathbb{1}[t_k, t_{k+1}](t)\, dt}_{t_{k+1} - t_k = \delta t} = \sum_{k=0}^{n-1} f_n^2(t_k)\, \delta t$$

Άρα $\mathbb{E}\left[\int_0^T f_n^2 dt\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[f_n^2(t_k)\right] \delta t = \mathbb{E}\left[I_n^2\right]$

ή $\|I_n\|_{L^2} = \|f_n\|_{M^2} < \infty$ άρα $I_n \in L^2(\Omega)$



$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{M^2}} f$

Στοχαστικό ολοκλήρωμα

Έστω στοχαστική διαδικασία $f \in M^2$. Συμβολίζουμε με $I(f)$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Ito εάν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|I(f) - I_n(f_n)|^2] = 0$$

για κάθε ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων που προσεγγίζουν την f στον M^2.

Θα γράφουμε:

$$I(f) \doteq \int_0^T f(t)dW_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

ή

$$I(f) \doteq \int_0^T f_t dW_t$$

Πρόταση

Για κάθε $f \in M^2$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Ito $I(f) \in L^2$ υπάρχει, είναι μοναδικό και ικανοποιεί

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right]$$

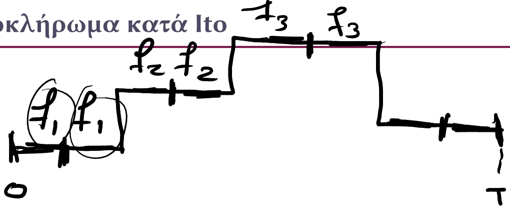
$n, m > N$, $m = 2n$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in M^2$ τ.ω $f_n \xrightarrow{M^2} f$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω $\|f_n - f\|_{M^2} < \varepsilon/2$, $\forall n \geq N$

$L^2(\Omega)$ είναι πλήρης χώρος.

$\|I_n(f_n) - I_{2n}(f_{2n})\|_{L^2} = \|I_{2n}(f_n) - I_{2n}(f_{2n})\|_{L^2} = (*)$



$$I_n(f_n) = I_{2n}(f_n)$$

$$\sum_{k=0}^{2n-1} f_{(k+2)//2}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)$$

$$\circledast = \| I_{2n}(f_n - f_{2n}) \|_{L^2} = \| f_n - f_{2n} \|_{M^2} =$$

$$= \| f_n - f + f - f_{2n} \|_{M^2} \le \| f_n - f \|_{M^2} + \| f_{2n} - f \|_{M^2}$$

$$\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$I_n \xrightarrow{L^2} I$$

$$I_n(f_n) \to \underline{I}(f)$$

Έστω $g_1, g_2, \dots$ τ.ω $g_n \xrightarrow{M^2} f$

Θ.ν.δ.ο $I_n(g_n) \to \underline{I}(f)$

Έστω

$f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n, \dots$

$\tilde{f}_1 \quad \tilde{f}_2, \dots \qquad \tilde{f}_n \to f \qquad I_n(g_n)$

$$\downarrow$$

$I_n(\tilde{f}_n) \xrightarrow{L^2} I(f)$

$\tilde{f}_{2n} \to f \qquad \tilde{f}_{2n+1} \to f \qquad I_n(f_n) \to I(f)$

Θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Ito της κίνησης Brown στο $\mathbb{T} = [0, T]$, δηλαδή,

$$I(W_t) = \int_0^T W_t dW_t$$

Το αποτέλεσμα θα είναι τυχαία μεταβλητή.

$$I(W_t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$W_{t_k} = \frac{1}{2}(W_{t_{k+1}} + W_{t_k}) - \frac{1}{2}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$W_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \frac{1}{2}(W_{t_{k+1}} + W_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$- \frac{1}{2}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2)}_{1} - \underbrace{\frac{1}{2}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}_{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2) = \frac{1}{2}(W_{t_n}^2 - W_{t_0}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(W_T^2 - W_0^2) = \frac{1}{2}W_T^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ② = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 \qquad Y_k = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$$

$$\mathbb{E}[Y_k] = \mathrm{Var}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}] = \delta t \qquad W_{t_{k+1}} - W_{t_k} \sim N(0, \delta t)$$

$$\mathrm{Var}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}] = \mathbb{E}\Big[\big(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} - \underbrace{\mathbb{E}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]}_{0}\big)^2\Big]$$

$$= \mathbb{E}\left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right] = \mathbb{E}[Y_k]$$

$$Var[Y_k] = \mathbb{E}\left[(Y_k - \mathbb{E}[Y_k])^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[Y_k^2 - 2Y_k\mathbb{E}[Y_k] + (\mathbb{E}[Y_k])^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}[Y_k^2] - 2(\delta t)^2 + \delta t^2 = (*)$$

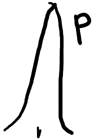
$$\mathbb{E}[Y_k^2] = \mathbb{E}\left[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^4\right] = 3(\delta t)^2$$

Από θεωρεία πιθανοτήτων

$X \sim N(0, \sigma^2)$ τότε $\mathbb{E}[X^4] = 3(\sigma^2)^2$

$$(*) = Var[Y_k] = 3(\delta t)^2 - (\delta t)^2 = 2(\delta t)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} ②$$



$-\frac{1}{2}T$

$$\mathbb{E}\left[\sum ②\right] = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\delta t = -\frac{1}{2}T$$

$$Var\left[\sum ②\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}(\delta t)^2 = n(\delta t)^2 = n\,\delta t\cdot\delta t =$$

$$= T\cdot\frac{T}{n} = \frac{T^2}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Άρα $I(W_t) = \frac{1}{2}W_T^{\,2} - \frac{1}{2}T.$