ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

4η διάλεξη - 21.10.2022

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος

Filtration

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$ Μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ ονομάζεται filtration εάν:

- $\mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_t, \quad t = 1, \ldots, T$ $\mathbb{T} = \{1, \ldots, T\}$
- $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$

Εκφράζει την πληροφορία που γίνεται διαθέσιμη σε κάθε χρόνο $t \in \mathbb{T}$.

Ο ορισμός επεκτείνεται και σε συνεχή χρόνο ($\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \ s < t$).

Filtered probability space

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$

Παράδειγμα : Τυχαίος περίπατος με 2 βήματα

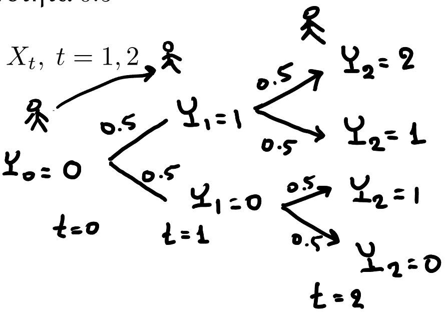
- Κίνηση στον πραγματικό άξονα σε διακριτές χρονικές στιγμές ($\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$)
- Αρχική θέση $Y_0 = 0$
- Βήματα στους διακριτούς χρόνους $t = 1, 2$

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

$$X_t = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 0.5 \end{cases}, t \in \{1, 2\}$$

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t, \; t = 1, 2$$

Θα κατασκευάσουμε filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$.



$\Omega = \{(1,2), (1,1), (0,1), (0,0)\}$

$\mathcal{F}_0 = \sigma(\Omega) = \{\Omega, \emptyset\}$

$\underline{t=1}$

① $Y_1 = 1 \quad \Omega_1^1 = \{(1,2), (1,1)\}$

② $Y_1 = 0 \quad \Omega_1^2 = \{(0,1), (0,0)\}$

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\Omega_1^1, \Omega_1^2)$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \Omega_1^1, \Omega_1^2\} \qquad (\Omega_1^1)^c = \Omega_1^2$$

$\underline{t=2}$

$\Omega_2^1 = \{(1,2)\}$

$\Omega_2^2 = \{(1,1)\}$

$\Omega_2^3 = \{(0,1)\}$

$\Omega_2^4 = \{(0,0)\}$

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\Omega_2^1, \Omega_2^2, \Omega_2^3, \Omega_2^4) = 2^{\Omega} = \mathcal{F}$$

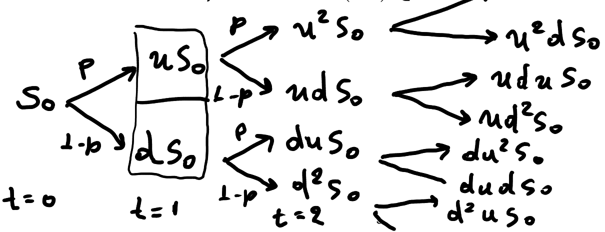
Παράδειγμα $u=1.2$ $d=0.8$ $p=0.4$

Διωνυμικό υπόδειγμα 3 βημάτων

- $\mathbb{T}=\{0,1,2,3\}$ $t\in T$
- Αρχική τιμή S_0
- Σε κάθε χρονική στιγμή $t\in\{1,2,3\}$ η αξία μεταβάλλεται ως εξής

$$S_t=\begin{cases} uS_{t-1}, & \text{με πιθανότητα } p\\ dS_{t-1}, & \text{με πιθανότητα } 1-p\end{cases}$$

όπου u,d θετικοί αριθμοί με $u>1$ και $d<1$.
Θα κατασκευάσουμε filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$.



$\searrow d^3 S_0$

$$\Omega = \{u^3, u^2d, udu, ud^2, du^2, dud, d^2u, d^3\} \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

$\underline{t=1}$

$$\Omega_1^{u} = \{u^3, u^2d, udu, ud^2\}$$

$$\Omega_1^{d} = \{d\underline{u}^2, d\underline{u}d, d^2u, d^3\}$$

$t = 2$

$$\Omega_2^{dd} = \{d^2u, d^3\}$$

$$\Omega_2^{du} = \{du^2, dud\}$$

$t = 3$

$$\Omega_3^{udu} = \{udu\}$$

Αν μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$ είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη για κάθε $t \in \mathbb{T}$, δηλαδή

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{T}$$

θα λέμε ότι είναι προσαρμοσμένη στην $\mathbb{F}$

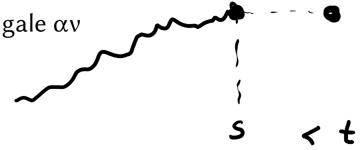
$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$

Martingales

Έστω ένας φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, ο χρόνος $\mathbb{T}$ και στοχαστική διαδικασία X_t $\mathbb{F}-$προσαρμοσμένη (adapted).

Θα ονομάζουμε την στοχαστική διαδικασία $\mathbb{F}$-martingale αν

1. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ $\quad \forall t \in \mathbb{T}$
2. $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s,\ s < t] = X_s$



Ποιες είναι οι προϋποθέσεις για να αποτελεί η S_t στο διωνυμικό υπόδειγμα στοχαστική διαδικασία martingale;

$t \qquad \qquad '' \; S_{t+1}$

$$\begin{tikzcd}
 & uS_t \\
S_t \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
 & dS_t
\end{tikzcd}$$

$t = 1, 2$

$$\mathbb{E}\{S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\} = uS_t \cdot p + dS_t \cdot (1-p) = S_t$$

$up + d - dp = 1 \qquad u = 1.2 \qquad 0.4p = 0.2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$d = 0.8$

Εστώ W_t Brownian Motion.
Ποια είναι η πιθανότητα $W_4 > 0$;

$$W_t \sim \mathcal{N}(0,t) \qquad f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2t}\right) = f(-w)$$

$$\mathbb{P}(W_4 > 0) = \int_0^\infty f(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(w)\,dw = \frac{1}{2}$$

Εστώ W_t Brownian Motion.
Θέλουμε να γράψουμε την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας για τις $W_t,\ W_s$ με $t > s$.

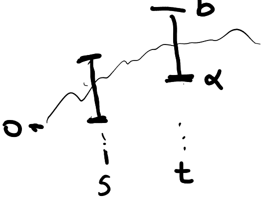
$W_t \in B$

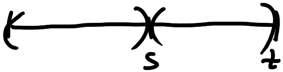
Συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας

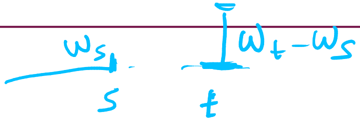
$$\mathbb{P}[W_t \in B] = \int_B f(w)\,dw$$

$$\mathbb{P}(W_t \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)\,dw$$

gated Brownian motion.







Εστώ W_t Brownian Motion.

Θέλουμε να γράψουμε την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας για τις $W_t,\ W_s$ με $t > s$.

Ο πιο απλός τρόπος είναι να γράψουμε $W_s = w_s,\ W_t = w_t \iff W_s = w_s,\ W_t - W_s = w_t - w_s$

Τότε για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχουμε

$$f(w_s,w_t) = f_{W_s W_t}(w_s,w_t) = f_{W_t - W_s}(w_t - w_s)\, f_{W_s}(w_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(w_t-w_s)^2}{2(t-s)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{w_s^2}{2s}}$$

άρα

$$f(w_s,w_t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}}\, e^{-\frac{w_s^2}{2s} - \frac{(w_t-w_s)^2}{2(t-s)}}$$

Σχόλιο:

Δεν χρειάζεται να πάμε με την συνάρτηση κατανομής που είναι σύνθετος χειρισμός.

Εστώ W_t Brownian Motion.
Θα εκφράσουμε την πιθανότητα να ισχύει $0 < W_s < W_t < 1$ για $t > s$.

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n} = 0\right\} = 1$$

Εστώ W_t Brownian Motion.
Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \dfrac{W_n}{n} = 0,\ n \in \mathbb{Z}$ σχεδόν βεβαίως (με πιθανότητα 1).

$$W_n \sim N(0,n)$$

$$W_n = \underbrace{(W_n - W_{n-1})}_{Y_n} + \underbrace{(W_{n-1} - W_{n-2})}_{Y_{n-1}} + \dots + \underbrace{(W_1 - W_0)}_{Y_1}$$

$\{Y_n\}$ iid $\qquad Y_n \sim N(0,1) \qquad W_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

$$\frac{1}{n} W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}$$

(SLLN)

strong law of large numbers

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} W_n = 0 \right) = 1$$

$$\forall t \qquad t \in [n, n+1] \qquad \left| \frac{W_t}{t} - \frac{W_n}{n} \right| = \left| \frac{W_t - W_n + W_n}{t} - \frac{W_n}{n} \right|$$

$$\leq \frac{|W_t - W_n|}{n} + \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| |W_n| =$$

$$= \frac{|W_t - W_n|}{n} + \frac{1}{(n+1)n} |W_n| \dots$$

Εστώ W_t Brownian Motion.
Θα δείξουμε (όχι με αυστηρό τρόπο) ότι η W_t δεν είναι παραγωγίσημη σχεδόν βεβαίως.

$$\frac{|W_{t+h} - W_t|}{h} > \varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$$X_t^{(n)} = \frac{W_{t+\frac{1}{n}} - W_t}{\frac{1}{n}} = n\,(\underbrace{W_{t+\frac{1}{n}} - W_t}_{\Delta_t})$$

ἔστω $\varepsilon > 0$

① $W_{t+\frac{1}{n}} - W_t \sim N(0, \frac{1}{n})$

② $n\Delta t \sim N(0, n)$

③ $n\Delta t = \sqrt{n}\, Z_t^{(n)}$, $Z \sim N(0,1)$

$$\mathbb{P}[|X_t^{(n)}| > \varepsilon] = \mathbb{P}[\sqrt{n}\,|Z_t^{(n)}| > \varepsilon] = \mathbb{P}\left[|Z_t^{(n)}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$\mathbb{P}[|Z_t^{(n)}| > 0] = 1$$

ἄρα W_t μη παραγωγίσιμη

Αποτελεί η κίνηση Brown στοχαστική διαδικασία martingale;

$$t > s$$

θ.ν.δ.ο $\mathbb{E}\{W_t \mid \mathcal{F}_s\} = W_s$