ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

3η διάλεξη - 17.10.2022

$W_{t_n} = X_1 + X_2 + \dots X_n$

Προσέγγιση της κινήσεως Brown σε διακριτοποιημένο χρόνο

- $\mathbb{T} = [0, T]$

random.randn (shape) $\sim \mathcal{N}(0,1)$

Ορίζουμε $\delta t = T/n,\ t_k = k\delta t,\ k = 0, \dots, n$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, \delta t),\ k = 1, \dots, n$$

$mgf = \exp\left\{\mu w + \frac{w^2\sigma^2}{2}\right\}$

Normal

$X_k \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \delta t)\ ,\ k = 1, \dots, n \qquad X_0 = 0$

$W_{t_k} = \sum_{j=1}^{k} X_j \sim \mathcal{N}(0, k\delta t)$

$mgf \longleftrightarrow$ συνάρτηση κατανομής.

$mgf_{X_j}(w) = \mathbb{E}\{\exp(wX_j)\} = \exp\left\{0w + \frac{w^2 \cdot \delta t}{2}\right\}$

$\int \exp(wx)\,p(x)\,dx$

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\mathrm{mgf}_{W_{t_k}}(\omega) = \mathbb{E}\left\{\exp\left(\omega \sum_{j=1}^{k} X_j\right)\right\} = \mathbb{E}\left\{\prod_{j=1}^{k} \exp(\omega X_j)\right\} =$$

$$\overset{\text{iid}}{=} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\{\exp(\omega X_j)\} = \left(\mathbb{E}(\exp(\omega X_k)\right)^k = \left(\mathrm{mgf}_{X_k}(\omega)\right)^k =$$

$$= \left(\exp\left(\frac{\omega^2 \delta t}{2}\right)\right)^k = \exp\left(\frac{\omega^2 \delta t\, k}{2}\right) = \exp\left(\frac{\omega^2 t_k}{2}\right)$$

$$W_{t_k} \sim \mathcal{N}(0, t_k)$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \longrightarrow [\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] \qquad \text{(cumsum)}$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \rightarrow [W_1 = x_1, W_2 = x_1 + x_2, \ldots, W_n = x_1 + \cdots + x_n]$$

Η τιμή μιας μετοχής περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία

$$S_t = S_0 \exp(\mu t) \exp(\sigma W_t - 0.5\sigma^2 t),\ S_0 = 1$$

με $\mu = 0.1$ και $\sigma = 0.25$.

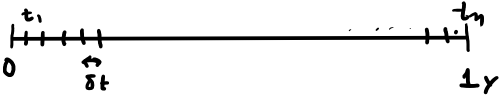
$T = 1 \quad T = [0, T]$

$\delta t = \frac{1}{365}$

$t_k = k\delta t$

Θα παρουσιάσουμε 10 πιθανά σενάρια για την πορεία της τιμής της μετοχής για τον επόμενο χρόνο (ανάλυση ανά μια μέρα).

Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής με την συμπλήρωση του έτους?



Εφαρμογή

$W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)}$ ανεξάρτητες

Θέλουμε να κατασκευάσουμε $\{B_t^{(i)}\}_{i=1,\dots d}$ κινήσεις Brown τέτοιες ώστε:

$$\mathrm{Corr}(B_t^{(i)}, B_t^{(j)}) = \rho_{ij} \in (-1,1),\ i \neq j$$

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p=q \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & & \rho_{ij} \\ & 1 & \\ & \ddots & 1 \end{bmatrix} \qquad B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_p \alpha_{ip} b_{pj}$$

$$B_t^{(i)} = \sum_{q=1}^{d} \lambda_{iq} W_t^{(q)}, \quad B_t^{(j)} = \sum_{p=1}^{d} \lambda_{jp} W_t^{(p)}$$

$$\mathrm{Cov}(B_t^{(i)}, B_t^{(j)}) = \mathbb{E}\{B_t^{(i)} B_t^{(j)}\} = \mathbb{E}\left\{ \sum_{p,q=1}^{d} \lambda_{iq}\lambda_{jp} W_t^{(q)} W_t^{(p)} \right\} =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{d} \lambda_{iq}\lambda_{jp} \underbrace{\mathbb{E}\{W_t^{(q)} W_t^{(p)}\}}_{\delta_{pq} \mathrm{Var}\{W_t^{(p)}\}} = \sum_{p=1}^{d} \lambda_{ip}\lambda_{jp} t = t \sum_{p=1}^{d} \lambda_{ip} \lambda^T_{pj}$$

$$\overset{\rho_{ij}}{\overset{\|}{\mathrm{Corr}}}\left(B_t^{(i)}, B_t^{(j)}\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left(B_t^{(i)}, B_t^{(j)}\right)}{\mathrm{Std}\left(B_t^{(i)}\right)\mathrm{Std}\left(B_t^{(j)}\right)} = \sum_{p=1}^{d} \lambda_{ip}\lambda_{pj}^{T}$$

$R = LL^T$ Cholesky decomposition $\Big(W_t \sim N(0, \underset{\sigma^2}{\underset{\uparrow}{t}})\Big)$

$R = R^T$

$x^T R x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Παραδείγμα

L

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.2 \\ 0.25 & 1 & 0.5 \\ -0.2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.968 & 0 \\ -0.2 & 0.568 & 0.798 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & -0.2 \\ 0 & 0.968 & 0.568 \\ 0 & 0 & 0.798 \end{bmatrix} = LL^T$$

$B = LW$

$$B_t^{(1)} = W_t^{(1)}$$

$$B_t^{(2)} = 0.25\, W_t^{(1)} + 0.968\, W_t^{(2)}$$

$$B_t^{(3)} = -0.2\, W_t^{(1)} + 0.568\, W_t^{(2)} + 0.798\, W_t^{(3)}$$

- Δυναμικά μεταβολής αξίας για συσχετισμένα προιόντα
- Η συσχέτιση περιγράφεται από το πίνακα R (συμμετρικός, μονάδες στη διαγώνιο, θετικά ορισμένος)

$$\frac{\partial S_t^{(n)}}{S_t^{(n)}} = \mu^{(n)} dt + \sigma^{(n)} dB_t^{(n)}, \quad n = 1, \ldots, d$$

Filtration

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$ Μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ ονομάζεται filtration εάν:

- $\mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_t, \quad t = 1, \ldots, T$
- $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$

Εκφράζει την πληροφορία που γίνεται διαθέσιμη σε κάθε χρόνο $t \in \mathbb{T}$

Filtered probability space

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$

Παράδειγμα : Τυχαίος περίπατος με 2 βήματα

- Κίνηση στον πραγματικό άξονα σε διακριτές χρονικές στιγμές ($\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$)
- Αρχική θέση $Y_0 = 0$
- Βήματα στους διακριτούς χρόνους $t = 1, 2$

$$X_t = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 0.5 \end{cases}, t \in \{1, 2\}$$

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t, \; t = 1, 2$$

Θα κατασκευάσουμε την ακολουθία $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (filtration).