

## 2η σειρά ασκήσεων

Θέματα Πιθανοτήτων - Στατιστικής : Μαθηματική Χρηματοοικονομία

kesmarag@gmail.com, kesmarag@uoc.gr

<https://kesmarag.gitlab.io>

Όπου εμφανίζεται  $W_t$  θα συμβολίζει την κίνηση Brown (Brownian motion).

Η παράδοση θα γίνει δια ζώσης με τρόπο και ημερομηνία (μέσα στην εξεταστική περίοδο) που θα ανακοινωθούν τις επόμενες ημέρες.

### Άσκηση 1

Δείξτε ότι

$$dW_t^n = \frac{n(n-1)}{2}W_t^{n-2}dt + nW_t^{n-1}dW_t$$

### Άσκηση 2

Δείξτε ότι  $X_t = \int_0^t W_s dW_s$  ανήκει στο  $M^2$  για κάθε  $T \geq 0$ .

### Άσκηση 3

Δείξτε ότι εάν  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$  και  $X \geq 0$  τότε

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] > 0$$

### Άσκηση 4

Σε συνθήκες μη επιτηδειότητας, βρείτε την τιμή για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που βασίζεται σε μια μετοχή που η αξία της ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Δίνονται οι παράμετροι

$$t \in \mathbb{T} = [0, 1], r = 0.01, K = 1, S_0 = 1, \sigma = 0.5$$

Προαιρετικά: Εκτιμήστε τη τιμή του δικαιώματος, προσεγγίζοντας τη μέση ανταμοιβή με έκπτωση  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T^* | S_0]$ , πραγματοποιώντας 10000 τυχαίες τροχιές.

### Άσκηση 5

Σε συνθήκες μη επιτηδειότητας, βρείτε την τιμή για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που βασίζεται σε μια μετοχή που η αξία της ακολουθεί το διωνυμικό υπόδειγμα με παραμέτρους

$$t \in \mathbb{T} = \{0, 1, \dots, 365\}, r = 0, K = 2, S_0 = 1, d = 0.9, u = 1.2$$

Προαιρετικά: Εκτιμήστε τη τιμή του δικαιώματος, προσεγγίζοντας τη μέση ανταμοιβή με έκπτωση  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T^* | S_0]$ , πραγματοποιώντας 10000 τυχαίες τροχιές.