ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

2η διάλεξη - 10.10.2022

Χώρος πιθανότητας

- Ω : Δειγματικός χώρος (Πιθανά αποτελέσματα)
- $\mathcal{F}$: σ-αλγέβρα ενδεχομένων του Ω (Ενδεχόμενα)
- $\mathbb{P}$: Μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

Η τριπλέτα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ καλείται χώρος πιθανότητας.

$\Omega = \{K, \Gamma\}$ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{K\}, \{\Gamma\}\}$

σ-άλγεβρα στο Ω

Ονομάζουμε μια συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του Ω, σ-άλγεβρα εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες

- $\Omega \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \cdots \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{F}$

$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Μεγαλύτερη σ-άλγεβρα στο Ω

Το δυναμοσύνολο του Ω (συλλογή όλων των υποσυνόλων) αποτελεί την μεγαλύτερη σ-άλγεβρα στο Ω. Το συμβολίζουμε ως 2^{Ω}.

σ-άλγεβρα που παράγεται από μια συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{G}$

Ονομάζεται η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τη συλλογή $\mathcal{G}$. Την συμβολίζουμε ως $\sigma(\mathcal{G})$

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},\, b-\frac{1}{n}\right],\quad [a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},\, b+\frac{1}{n}\right)$$

σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ονομάζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την συλλογή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a,b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty)$

ισοδύναμα, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((-\infty, x],\ x \in \mathbb{R})$

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, x+\frac{1}{n}\right)$$

Μέτρο πιθανότητας

Μια απεικόνιση $\mathbb{P}$ από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ στο διάστημα $[0,1]$ ονομάζεται μέτρο πιθανότητας εάν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Εάν $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \dots$ ξένα τότε $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

ανα δυο $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\Omega = \{K, \Gamma\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{K\}, \{\Gamma\}\}$, $\mathbb{P}(K) = 1/2$ $\mathbb{P}(\Gamma) = 1/2$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

κ Γ

$\Omega = \{1, 0\}$ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{0\}\}$ $(\Omega, \mathcal{F})$

$X(\omega) = \omega, \ \omega \in \Omega$

μετρήσιμος

Τυχαία μεταβλητή

$x = 0.5$

Μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ για την οποία

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 0.5\}$

$=$

$\{0\} \in \mathcal{F}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καλείται τυχαία μεταβλητή.

Πιθανότητα τυχαίας μεταβλητής

$$P_X(A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$X^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad S_{t^*} : \Omega \to \mathbb{R}^+$

$\omega^* \in \Omega$

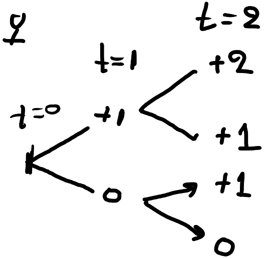
- Αξία προιόντος - Την περιγράφουμε με μια στοχαστική διαδικασία

$$(t, \omega) \to S_t(\omega) \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \in \mathbb{T},\ \omega \in \Omega$$

- Δοσμένο $\omega^* \in \Omega$: $S_t(\omega^*)$ μια πραγματοποίηση (τροχιά).
- Δοσμένο $t^* \in \mathbb{T}$: $S_{t^*}(\omega)$ τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την αξία την χρονική τιμή t^*.

Παράδειγμα : Τυχαίος περίπατος με 2 βήματα

- Κίνηση στον πραγματικό άξονα σε διακριτές χρονικές στιγμές ($\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$)
- Αρχική θέση $Y_0 = 0$
- Βήματα στους διακριτούς χρόνους $t = 1, 2$



$$X_t = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 0.5 \end{cases}, t \in \{1, 2\}$$

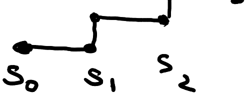
$$Y_t = Y_{t-1} + X_t,\ t = 1, 2$$

$Y_0 = 0 \quad Y_1 = X_1$

$Y_2 = X_1 + X_2$

$\Omega = \{12, 11, 01, 00\}$

$\omega^* = 12$



$t^* = 2 \qquad S_{t^*}(\omega) \qquad P(S_{t^*} = +2) = 1/4 = P(S_{t^*} = 0) \qquad P(S_{2^*} = 1) = 1/2.$

Μοντέλο για τη μεταβολή της αξίας ενός προϊόντος

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- $t \in \mathbb{T} = [0, T]$: Χρόνος
- W_t: Κίνηση Brown (Brownian motion)

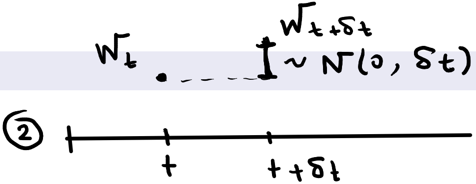
- Θα δείξουμε στη πορεία του μαθήματος ότι η λύση της παραπάνω στοχαστικής εξίσωσης δίδεται ως:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t) \exp(\sigma W_t - 0.5\sigma^2 t)$$

- Το μ θα δούμε ότι σχετίζεται με το προϊόν χωρίς ρίσκο

Ονομάζεται η στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο με τις ακόλουθες ιδιότητες

- $W_0 = 0$ (Αρχική θέση)
- 2 $W_{t+\delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \delta t)$, για κάθε $\delta t > 0$
- 3 Εάν $(t_1, t_2) \cap (s_1, s_2) = \emptyset$ τότε $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{s_2} - W_{s_1}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.



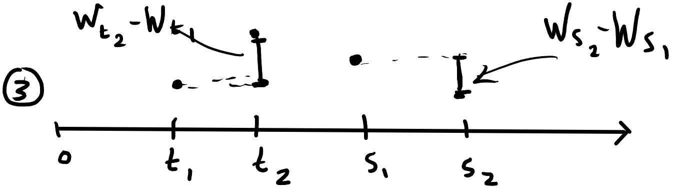
Πόρισμα

- $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- $W_t = \sqrt{t} Z,\ Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$(0, t)$

$W_t - \overset{0}{W_0} \sim N(0, t)$

$W_t = \sqrt{t}\, Z$



- $\mathbb{E}(W_t) = 0$
- $\mathrm{Var}(W_t) = t$

Για $t \neq s$ θα υπολογίσουμε το $\mathrm{Corr}(W_t, W_s)$

$$\mathrm{Var}(W_t) = \mathbb{E}\{(W_t - \mathbb{E}(W_t))^2\} = \mathbb{E}\{W_t^2\}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\}$$

$$= \mathbb{E}\{XY\}, \text{ εφόσον } \mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{Y\} = 0$$

$$r = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1]$$

$t \neq s$ $\qquad t > s \quad W_t = W_t - W_s + W_s$

$$\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E}\{W_t W_s\} = \mathbb{E}\{(W_t - W_s) W_s\} + \mathbb{E}\{W_s^2\}$$

$$= \mathbb{E}\{(W_t - W_s)(W_s - W_0)\} + \mathbb{E}\{(W_s - \mathbb{E}\{W_s\})^2\} = *$$

- $\mathbb{E}(W_t) = 0$
- $\mathsf{Var}(W_t) = t$

Για $t \neq s$ θα υπολογίσουμε το $\mathsf{Corr}(W_t, W_s)$

$$* = \mathbb{E}\{(W_t - W_s)\}\mathbb{E}\{W_s\} + Var\{W_s\} =$$

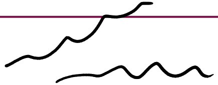
$$= s$$

Για $t \neq s$

$$Cov(W_t, W_s) = min\{t, s\}$$

$$Corr(W_t, W_s) = \frac{min\{t, s\}}{\sqrt{t}\sqrt{s}} =$$

$$= min\left\{\sqrt{\frac{t}{s}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right\}$$



Έστω $W_t^{(1)},\ W_t^{(2)}$ ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Για ποιες τιμές $a, b \in \mathbb{R}$ η στοχαστική διαδικασία $B_t = aW_t^{(1)} + bW_t^{(2)}$ αποτελεί κίνηση Brown;

$$\mathbb{E}\{B_t\} = \alpha\, \mathbb{E}\{W_t^{(1)}\} + b\, \mathbb{E}\{W_t^{(2)}\} = 0$$

$$\mathrm{Var}\{B_t\} = \alpha^2\, \mathrm{Var}\{W_t^{(1)}\} + b^2\, \mathrm{Var}\{W_t^{(2)}\} =$$

$$= (\alpha^2 + b^2)\, t \quad , \quad \text{θέλουμε} \quad \alpha^2 + b^2 = 1$$

Θα κατασκευάσουμε 2 συσχετισμένες κινήσεις Brown $W_t,\ B_t$ με Corr$(W_t, B_t) = r \in (-1, 1)$.

$$\mathrm{Cov}\left\{B_t, W_t^{(1)}\right\} = \mathbb{E}\left\{B_t W_t^{(1)}\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left(\alpha W_t^{(1)} + b W_t^{(2)}\right) W_t^{(1)}\right\} =$$

$$= \alpha\, \mathbb{E}\left\{\left(W_t^{(1)}\right)^2\right\} + b\, \mathbb{E}\left\{W_t^{(2)} W_t^{(1)}\right\} =$$

$$= \alpha t \qquad \mathrm{Corr}\left\{B_t, W_t^{(1)}\right\} = \frac{\alpha t}{t^{1/2}\, t^{1/2}} = \alpha$$

$$\underline{\underline{\alpha = r}} \qquad b = (1 - r^2)^{1/2}$$

Προσέγγιση της κινήσεως Brown σε διακριτοποιημένο χρόνο

- $\mathbb{T} = [0, T]$

Ορίζουμε $\delta t = T/n,\ t_k = k\delta t,\ k = 0, \ldots, n$

$$W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \sim \mathcal{N}(0, \delta t),\ k = 1, \ldots, n$$

Η τιμή μιας μετοχής περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία

$$S_t = S_0 \exp(\mu t) \exp(\sigma W_t - 0.5\sigma^2 t),\ S_0 = 1$$

με $\mu = 0.1$ και $\sigma = 0.25$.

Θα παρουσιάσουμε 10 πιθανά σενάρια για την πορεία της τιμής της μετοχής για τον επόμενο χρόνο (ανάλυση ανά μια μέρα).

Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής με την συμπλήρωση του έτους?