1η σειρά ασκήσεων

Θέματα Πιθανοτήτων - Στατιστικής : Μαθηματική Χρηματοοικονομία

kesmarag@gmail.com, kesmarag@uoc.gr

`https://kesmarag.gitlab.io`

Όπου εμφανίζεται W_t θα συμβολίζει την κίνηση Brown (Brownian motion).

Άσκηση 1

Έστω $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$. Δίνεται η στοχαστική διαδικασία X_t με $X_0 = 0$ και για $t > 0$

$$\underline{X}_t = \begin{cases} 2X_{t-1}, & \text{με πιθανότητα } p, \\ X_{t-1} - c, & \text{με πιθανότητα } \underline{1-p} \end{cases}, \; t = 1, 2, 3$$

με $p \in (0, 1)$ και $c > 0$.

1. Εξετάστε εάν υπάρχουν p, c έτσι ώστε η X_t να είναι martingale.
2. Για $p = 0.1,\; c = 1$ δημιουργήστε και εμφανίστε 10 τυχαίες τροχίες της X_t.

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = X_{t-1}$$

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 2X_{t-1} \cdot p + (X_{t-1} - c) \cdot (1-p) =$$

$$= [2p + (1-p)] X_{t-1} - c(1-p)$$

$p = 0$

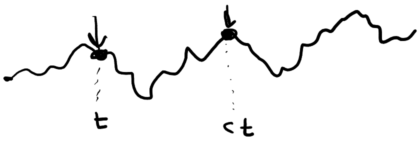
$p = 1$ ή $c = 0$

Άσκηση 1

Άσκηση 2

1. Υπολογίστε τη συσχέτιση (correlation) των W_t και W_{ct} για $c > 0$.
2. Εξετάστε εάν υπάρχουν τιμές α και β έτσι ώστε η $D_t = \alpha W_t + \beta W_{ct}$ είναι κίνηση Brown;
3. Εξετάστε εάν υπάρχουν τιμές α και β έτσι ώστε η D_t είναι martingale;

(1)



$$\mathrm{Cov}[W_t, W_s] = \min(t,s)$$

$$\mathrm{Cov}[W_t, \underbrace{W_{ct}}_{s}] = \min(t, ct) = \begin{cases} t & \text{αν } c \geq 1 \\ ct & \text{αν } c < 1 \end{cases}$$

$c<1$

$$\mathbb{E}[W_t W_{ct}] = \mathbb{E}[(W_t - W_{ct} + W_{ct}) W_{ct}] = \mathbb{E}[(W_t - W_{ct}) W_{ct}]$$

$$+ \mathbb{E}[W_{ct}^2] = \underbrace{\mathbb{E}[W_t - W_{ct}]\,\mathbb{E}[W_{ct}]}_{0} + ct = ct$$

$$\mathrm{Cov}[W_t, W_{ct}] = \min(t, ct) = t \min(1, c)$$

$$\mathrm{Corr}[W_t, W_{ct}] = \frac{\cancel{t} \min(1,c)}{\cancel{t^{1/2}}\, c^{1/2}\, \cancel{t^{1/2}}} = \min(c^{-1/2}, c^{1/2})$$

(2)

$$\mathrm{Var}\, D_t = \mathbb{E}[D_t^2] = \mathbb{E}[(\alpha W_t + \beta W_{ct})^2] =$$

$$= \alpha^2 \mathbb{E}[W_t^2] + 2\alpha\beta\, \mathbb{E}[W_t W_{ct}] + \beta^2 \mathbb{E}[W_{ct}^2] =$$

$$= \alpha^2 t + 2\alpha\beta t \min(1,c) + \beta^2 ct =$$

$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta \min(1,c) + \beta^2 c)\, t$$

θέλουμε $\quad \alpha^2 + 2\alpha\beta \min(1,c) + \beta^2 c = 1$

για $\quad c > 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 c = 1$

$\quad c < 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta c + \beta^2 c = 1$

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$$

$$D_t = \alpha W_t + \beta W_{ct} = \alpha W_t + \beta c^{1/2} \underbrace{\boxed{c^{-1/2} W_{ct}}}_{W_t^{(2)}}$$

$$\mathbb{E}[D_t \mid \mathcal{F}_s] = \alpha\, \mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] + \beta c^{1/2}\, \mathbb{E}[W_t^{(2)} \mid \mathcal{F}_s] =$$

$$= \alpha W_s + \beta c^{1/2} W_s^{(2)} = \alpha W_s + \beta W_{cs}$$

Άσκηση 2

Άσκηση 3

1. Εξετάστε εάν η $B_t = W_{t+T} - W_T$ είναι αποτελεί κίνηση Brown.
2. Υπολογίστε τη συσχέτιση των W_t και B_t.

$$B_0 = W_T - W_T = 0.$$

$$\operatorname{Var} B_t = \operatorname{Var}[W_{t+T} - W_T] = t + T - T = t.$$

$$\operatorname{Var}[W_t - W_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = \mathbb{E}[W_t^2 + W_s^2 - 2W_tW_s] =$$

$$= t + s - 2\mathbb{E}[W_tW_s] = t + s - 2\min(t,s) \begin{cases} \xrightarrow{t>s} t + s - 2s = t-s \\ \rightarrow s-t \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[B_tW_t] = \mathbb{E}[(W_{t+T} - W_T)W_t] =$$

$$= \mathbb{E}[W_{t+T} - W_T]\,\mathbb{E}[W_t] = 0$$

Άσκηση 3

Άσκηση 4

1. Δείξτε ότι $W_t^2 \in M^2$ για $t \in \mathbb{T} = [0, \mathrm{T}]$.
2. Δείξτε ότι:

$$\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3} W_T^3 - \int_0^T W_t dt$$

$$\|X_t\|^2_{M^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 \, dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[X_t^2\right] dt$$

$$\|W_t^2\|_{M^2} = \int_0^T \mathbb{E}\left[W_t^4\right] dt \overset{\theta.\nu.\delta.o}{<} \infty$$

$$\mathbb{E}\left[W_t^4\right] = \left(t^{1/2}\right)^4 \int_{\mathbb{R}} z^4 (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} \, dz =$$

$W_t \sim N(0,t)$

$t^{1/2} W_1$

$W_1 \sim N(0,1)$

$$= -t^2 (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} z^3 \left(e^{-z^2/2}\right)' dz =$$

$$= t^2 \underbrace{(2\pi)^{-1/2}} \, 3 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2/2} \, dz} = 3t^2$$

$X \sim N(0, \sigma^2)$

$X = \sigma Z$

$Z \sim N(0,1)$

$$Var[Z] = \sigma_Z^2 = 1 = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2/2} \, dz$$

$$\|W_t^4\|^2_{M^2} = \int_0^T 3t^2 \, dt = T^3 < \infty$$

Άσκηση 4

Άσκηση 5

Εάν X_t είναι martingale, δείξτε ότι

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s],\ t > s$$

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 + X_s^2 - 2X_tX_s \,|\mathcal{F}_s] =$$

$$= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s^2|\mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[X_tX_s|\mathcal{F}_s] =$$

$$= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] + X_s^2 - 2X_s\,\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] + X_s^2 - 2X_s^2 =$$

$$= \mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[X_s^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2|\mathcal{F}_s]$$

Άσκηση 5

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[W_t] - t\,\mathbb{E}[W_1]$$

Άσκηση 6

Έστω $\mathbb{T} = [0, 1]$. Δίνεται η στοχαστική διαδικασία X_t με

$$X_t = W_t - tW_1$$

1. Υπολογίστε την συνδιασπορά των X_t και X_{1-t}.
2. Δημιουργήστε τροχιές (1 διακριτή προσέγγιση για 128 σημεία για κάθε στοχαστική διαδικασία) για τις $X_t, \mathrm{X}_{1-t}, 0.5X_t + 0.5X_{1-t}$.

$$Cov[X_t X_{1-t}] = \mathbb{E}[X_t X_{1-t}] = \mathbb{E}[(W_t - tW_1)(W_{1-t} - (1-t)W_1)]$$

$$= \mathbb{E}[W_t W_{1-t}] - (1-t)\,\mathbb{E}[W_t W_1] - t\,\mathbb{E}[W_1 W_{1-t}] + t(1-t)\,\mathbb{E}[W_1^2] =$$

$$= \min(t, 1-t) - (1-t)t \cancel{- t(1-t)} \cancel{+ t(1-t)}$$

$$Var(X_t) = \mathbb{E}((W_t - tW_1)^2) =$$

$$= \mathbb{E}[W_t^2] + t^2\,\mathbb{E}[W_1^2] - 2t\,\mathbb{E}[W_t W_1] =$$

$$= t + t^2 - 2t \cdot t = t - t^2 = t(1-t)$$

Άσκηση 6