

1η σειρά ασκήσεων

Θέματα Πιθανοτήτων - Στατιστικής : Μαθηματική Χρηματοοικονομία

kesmarag@gmail.com, kesmarag@uoc.gr

<https://kesmarag.gitlab.io>

Όπου εμφανίζεται W_t θα συμβολίζει την κίνηση Brown (Brownian motion).

Άσκηση 1

Εστω $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3\}$. Δίνεται η στοχαστική διαδικασία X_t με $X_0 = 0$ και για $t > 0$

$$X_t = \begin{cases} 2X_{t-1}, & \text{με πιθανότητα } p, \\ X_{t-1} - c, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}, t = 1, 2, 3$$

με $p \in (0, 1)$ και $c > 0$.

1. Εξετάστε εάν υπάρχουν p, c έτσι ώστε η X_t να είναι martingale.
2. Για $p = 0.1, c = 1$ δημιουργήστε και εμφανίστε 10 τυχαίες τροχιές της X_t .

Άσκηση 2

1. Υπολογίστε τη συσχέτιση (correlation) των W_t και W_{ct} για $c > 0$.
2. Εξετάστε εάν υπάρχουν τιμές α και β έτσι ώστε η $D_t = \alpha W_t + \beta W_{ct}$ είναι κίνηση Brown;
3. Εξετάστε εάν υπάρχουν τιμές α και β έτσι ώστε η D_t είναι martingale;

Άσκηση 3

1. Εξετάστε εάν η $B_t = W_{t+T} - W_T$ είναι αποτελεί κίνηση Brown.
2. Υπολογίστε τη συσχέτιση των W_t και B_t .

Άσκηση 4

1. Δείξτε ότι $W_t^2 \in M^2$ για $t \in \mathbb{T} = [0, T]$.
2. Δείξτε ότι:

$$\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3} W_T^3 - \int_0^T W_t dt$$

Άσκηση 5

Εάν X_t είναι martingale, δείξτε ότι

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s], t > s$$

Άσκηση 6

Εστω $\mathbb{T} = [0, 1]$. Δίνεται η στοχαστική διαδικασία X_t με

$$X_t = W_t - tW_1$$

1. Υπολογίστε την συνδιασπορά των X_t και X_{1-t} .
2. Δημιουργήστε τροχιές (1 διακριτή προσέγγιση για 128 σημεία για κάθε στοχαστική διαδικασία) για τις $X_t, X_{1-t}, 0.5X_t + 0.5X_{1-t}$.

Παράδοση - οδηγίες

Η παράδοση των ασκήσεων πρέπει να γίνει την Παρασκευή 18.11.2022 στο μάθημα. Οι απαντήσεις στα θεωρητικά ερωτήματα πρέπει να δοθούν σε έντυπη μορφή. Οι απαντήσεις στα υπολογιστικά ερωτήματα πρέπει να γίνει με αποστολή email στο mf2223@pm.me με θέμα set1. Η παράδοση των ασκήσεων είναι υποχρεωτική.