Ενδιάμεση Εξέταση

Θέματα Πιθανοτήτων - Στατιστικής : Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Διάρκεια: 150 λεπτά

Διδάσκων: Κώστας Σμαραγδάκης

Όπου εμφανίζεται W_t θα συμβολίζει την κίνηση Brown (Brownian motion) στο $t \in \mathbb{T} = [0, 1]$.

Θέμα 1 (2 μονάδες)

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_1 \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$

α) Γράψτε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος $\int_0^1 W_t dW_t$ (με όριο και άθροισμα).

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα με όποιο τρόπο θέλετε.

Θέμα 2 (2 μονάδες)

Για την στοχαστική διαδικασία $X_t,\ t = 0, 1, \ldots$ έχουμε αρχική τιμή $X_0 = 1$ και $p \in (0, 1)$. Ισχύει

$$X_t = \begin{cases} 0.9X_{t-1} + 0.1, & \text{με πιθανότητα } p \\ X_{t-1}, & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases}, \ t = 1, 2, \ldots$$

Βρείτε στοχαστική διαδικασία της μορφής $Y_t = aX_t + b$ με [redacted] 0 έτσι ώστε η Y_t να είναι martingale.

$\alpha = 0$

$\mathbb{E}[Y_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \alpha\, \mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] + b$

$= \alpha(p 0.9 X_t + 0.1 p + (1-p) X_t) + b$

$X_t \underbrace{(\alpha p 0.9 + \alpha - \alpha p)}_{= \alpha} + \overbrace{b + 0.1 p \alpha}^{= 0}$

Θέμα 3 (2 μονάδες)

α) Δείξτε ότι $tW_t \in M^2$.

β) Υπολογίστε τη διασπορά του ολοκληρώματος $\int_0^1 tW_t dW_t$, (Υπενθύμιση: Η μέση τιμή είναι μηδέν).

Θέμα 4 (2 μονάδες)

α) Βρείτε θετική σταθερά a και μη αρνητική συνάρτηση $b(t)$ έτσι ώστε $X_t = aW_{2t/3}$ και $Y_t = b(t)W_{1-t/3}$ να είναι κινήσεις Brown για $t \in \mathbb{T} = [0, 1]$.

β) Για τα παραπάνω $a, b(t)$ εκφράστε την στοχαστική διαδικασία X_t ως γραμμικό συνδυασμό της Y_t και μιας κίνησης Brown B_t τέτοια ώστε $\text{Cov}(Y_t, B_t) = 0$.

Θέμα 5 (2 μονάδες)

Έστω η στοχαστική διαδικασία $X_t,\ t \in \mathbb{T} = [0, 1]$ για την οποία ισχύει

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dW_t,\ X_0 = 1$$

Δείξτε ότι $X_t = e^{W_t}$ είναι λύση της εξίσωσης. Υποθέστε μοναδικότητα.

Εάν επιπλέον έχουμε την στοχαστική διαδικασία $Y_t = tW_t$ δείξτε ότι

$$d(X_tY_t) = (0.5tW_te^{W_t} + W_te^{W_t} + te^{W_t})dt + (te^{W_t} + tW_te^{W_t})dW_t$$

Θέμα 6 (2 μονάδες)

Για δύο μετοχές θεωρούμε ότι η αξίες ακολουθούν τις εξισώσεις:

$$\frac{dS_t^{(j)}}{S_t^{(j)}} = 2jdW_t^{(j)},\ S_0^{(j)} = 1, \quad j = 1, 2$$

Υπολογίστε το $\text{Corr}(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})$ εάν είναι γνωστό το $\text{Corr}(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}) = \rho \in (-1, 1)$.

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t, t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t, t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

Θέμα 2 : $Y_t = \alpha X_t + bt$

$$Y_{t+1} = \alpha X_{t+1} + bt + b$$

$$\mathbb{E}[Y_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \alpha\, \mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] + bt + b$$

$$\mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \alpha\left(p \cdot 0.9 X_t + 0.1 p + (1-p) X_t\right) + bt + b$$

$$\alpha p \cdot 0.9 + \alpha(1-p) = \alpha$$

α

$$\alpha \cdot 0.1 p + b = 0$$

$$b = -\alpha \cdot 0.1 p$$

Θέμα 3 : $tW_t \in M^2$ $\quad W_t^2 \in M^2$

Θ.ν.δ.ο

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (tW_t)^2 dt\right] < \infty$$

$$\mathbb{E}[|I|^2] = $$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^1 f^2 dt\right]$$

$$\int_0^1 t^2\, \underbrace{\mathbb{E}[W_t^2]}_{t}\, dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^1 t W_t\, dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 t W_t\, dW_t\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^1 (tW_t)^2 dt\right] = \frac{1}{4}$$

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t, t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t, t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

Ασκηση 4:

$$\alpha W_{\frac{2}{3}t} \sim N(0, t)$$

$$\wr \qquad \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$N\left(0, \alpha^2 \frac{2}{3} t\right).$$

$$b(t) W_{1 - t/3} \sim N\Big(0, \overbrace{b^2(t)\left(1 - t/3\right)}^{t}\Big)$$

$$b^2(t) = \frac{t}{1 - t/3} \Rightarrow \sqrt{\frac{t}{1 - t/3}} = b(t)$$

$$X_t = \rho\, \overbrace{Y_t + q B_t}^{Cov. = 0} \qquad p^2 + q^2 = 1$$

$$Cov(X_t Y_t) = \mathbb{E}[X_t Y_t] = \alpha\, b(t)\, \mathbb{E}\left[W_{2t/3} W_{1 - t/3}\right]$$

$$= \alpha\, b(t) \min\left[2t/3, 1 - t/3\right] \qquad 2t/3 \leq 1 - t/3$$

$$t \leq 1$$

$$= \alpha\, b(t) \frac{2t}{3}$$

άρα $\quad \rho = \alpha\, b(t) \frac{2}{3}$

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$\rightarrow dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t,t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t,t) = \left\{\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}}^{0} + \mu(X_t,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}dt + \sigma(X_t,t)\frac{\partial f}{\partial x}dW_t$$

$$\rightarrow dX_t = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}X_t}}_{}\!\!{}^{\mu(X_t)} dt + \boxed{X_t}^{\,\sigma(X_t)} dW_t, \quad X_0 = 1$$

$$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$d(\log X_t) = \left[\frac{1}{2}\cancel{X_t}\frac{1}{\cancel{X_t}} + \frac{1}{2}\cancel{X_t^2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{X_t^2}}\right)\right]dt + X_t\frac{1}{X_t}dW_t$$

$$d(\log X_t) = dW_t$$

$$\int_0^t d(\log X_s) = \int_0^t dW_s, \quad t \in [0,1]$$

$$\log X_t - \cancel{\log X_0}^{0} = W_t \Rightarrow \log X_t = W_t$$

$$X_t = e^{W_t}$$

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t, t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t, t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

$$d(X_t Y_t) = dX_t \, Y_t + X_t \, dY_t + d[X_t, Y_t]$$

$$d[X_t, Y_t] = dX_t \, dY_t = \left(\frac{1}{2} X_t dt + X_t dW_t\right)\underbrace{\left(t dW_t + W_t dt\right)}_{dY_t}$$

$$= t X_t dt$$

$$d(X_t Y_t) = \left(\frac{1}{2} X_t dt + X_t dW_t\right) t W_t + X_t \left(t dW_t + W_t dt\right) + t X_t dt =$$

$$= dt\left[\frac{t}{2} X_t W_t + X_t W_t + t X_t\right] + dW_t\left[t X_t W_t + t X_t\right]$$

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t, t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t, t) = \left\{ \cancel{\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x}} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

<u>Ασκηση 6</u> $\quad S_0^{(j)} = 1 \qquad \mu = 0, \quad \sigma = 2j S_t^{(j)}$

$$\frac{dS_t^{(j)}}{S_t^{(j)}} = 2j\, dW_t^{(j)} \Rightarrow dS_t^{(j)} = \underbrace{2j S_t^{(j)}}\, dW_t^{(j)}$$

$$d(\log S_t^{(j)}) = -\frac{1}{2}4j^2\, dt + 2j\, dW_t^{(j)}$$

$$S_t^{(j)} = e^{-2j^2 t + 2j W_t^{(j)}}$$

$$\mathbb{E}[S_t^{(j)}] = e^{-2j^2 t}\, \mathbb{E}[e^{2j W_t^{(j)}}] =$$

$$= e^{-2j^2 t} e^{\frac{1}{2}2^2 j^2 t} = e^0 = 1.$$

$$\mathrm{Cov}[S_t^{(1)}, S_t^{(2)}] = \mathbb{E}[S_t^{(1)} S_t^{(2)}] - \overbrace{\mathbb{E}[S_t^{(1)}]}^{\overset{1}{\parallel}} \cdot \overbrace{\mathbb{E}[S_t^{(2)}]}^{\overset{1}{\parallel}}$$

$$\mathbb{E}[S_t^{(1)} S_t^{(2)}] = e^{-2t} e^{-2\cdot 4t}\, \mathbb{E}[e^{2W_t^{(1)} + 4W_t^{(2)}}] =$$

$$= e^{-10t}$$

$$W_t^{(1)} = \rho W_t^{(2)} + q B_t, \quad \rho^2 + q^2 = 1$$

$$\mathbb{E}[e^{2\rho W_t^{(2)} + 4W_t^{(2)} + 2q B_t}] =$$

$$= \mathbb{E}[e^{(2\rho + 4) W_t^{(2)}}]\, \mathbb{E}[e^{2q B_t}]$$

Ito's Formula (Ito's Lemma)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στοχαστική διαδικασία X_t τέτοια ώστε

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{(στοχαστική διαφορική εξίσωση διάχυσης)}$$

όπου μ, σ συνεχείς συναρτήσεις ως προς X_t, t. Η Ito's formula για την $f(X_t, t)$ γράφεται ως:

$$df(X_t, t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

$$= e^{\frac{1}{2}(2p+4)^2 t} e^{\frac{1}{2}(2q)^2 t} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}[4p^2 + 16 + 16p + 4q^2]t} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(20 + 16p)t} = e^{10t} e^{8pt}$$

άρα $\mathrm{Cov}[S_t^{(1)}, S_t^{(2)}] = e^{8pt} - 1$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[S_t^{(1)}, S_t^{(2)}]}{std(S_t^{(1)})\, std(S_t^{(2)})}$$

$\mathrm{Var}\, S_t^{(j)} =$

$$= \mathbb{E}[S_t^{(j)2}] - (\mathbb{E}[S_t^{(j)}])^2 =$$

$$= e^{-4j^2 t}\, \mathbb{E}[e^{4jW_t}] - 1$$

$$= e^{-4j^2 t} e^{\frac{1}{2} 16 j^2 t} - 1$$

$$= e^{4j^2 t} - 1$$

$std(S_t^{(j)}) = (e^{4j^2 t} - 1)^{1/2}$ άρα $\rho = \dfrac{e^{8pt} - 1}{(e^{4t} - 1)^{1/2}(e^{16t} - 1)^{1/2}}$