ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

1η διάλεξη - 7.10.2022

Ιστοσελίδα μαθήματος

https://kesmarag.github.io/mf2223

Περιγραφή

- Το μάθημα παρουσιάζει τα μαθηματικά εργαλεία που χρειάζονται για την επίλυση ενός προβλήματος χρηματοοικονομίας.
- Το πρόβλημα αφορά την τιμολόγηση βασικών χρηματοοικονομικών παραγώγων.
- Η περιγραφή θα είναι από την σκοπιά της στοχαστικής ανάλυσης και των διαφορικών εξισώσεων.

Τρόπος αξιολόγησης

- Υποχρεωτική ενδιάμεση εξέταση (πρόοδος) - 30 %
- Υποχρεωτικές ενδιάμεσες αναθέσεις ασκήσεων/εφαρμογών με εξέταση - 10 %
- Τελική εξέταση - 60 %

Παράδειγμα

Έστω αμερόληπτο κέρμα. Ένα άτομο μας προσφέρει δικαίωμα συμμετοχής στο ακόλουθο παιχνίδι τύχης.
Ρίχνουμε το κέρμα μία φορά, εάν το αποτέλεσμα είναι heads τότε λαμβάνουμε μια μονάδα χρήματος, διαφορετικά δεν υπάρχει κέρδος ή ζημιά. Δηλαδή:

$$\text{Heads} : +1, \quad \text{Tails} : 0$$

- Ποιο είναι το αναμενόμενη απόδοση (για εμάς) του παιχνιδιού;
- Πως μπορούμε να κάνουμε το παιχνίδι τίμιο;

$$X = \begin{cases} 1, & K \\ 0, & \Gamma \end{cases} \qquad P(X=1) = 1/2 = P(X=0)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\{f(x)\} = \frac{1}{2}\,€$$

$\Pi = \frac{1}{2}\,€$ είσοδος στο παιχνίδι

Παράδειγμα

Έστω αμερόληπτο κέρμα. Ένα άτομο μας προσφέρει δικαίωμα συμμετοχής στο ακόλουθο παιχνίδι τύχης.
Ρίχνουμε το κέρμα μία φορά (σε ένα έτος από σήμερα), εάν το αποτέλεσμα είναι heads λαμβάνουμε μια μονάδα χρήματος, διαφορετικά δεν υπάρχει κέρδος ή ζημιά. Δηλαδή:

$$\text{Heads} : +1, \quad \text{Tails} : 0$$

Επιπλέον στο σύστημα μας υπάρχει μια τράπεζα η οποία προσφέρει επιτόκιο καταθέσεων $r = 0.05$.

- Ποιο είναι το αναμενόμενη απόδοση (για εμάς) του παιχνιδιού;
- Πως μπορούμε να κάνουμε το παιχνίδι τίμιο;

$\downarrow^{k}$ $+1$€

$\uparrow \Gamma$ 0€

$\downarrow$ είσοδος

π

$r = 0.05$

$\pi \cdot (1+r)$

$\pi + \frac{5}{100}\pi$

$\mathbb{E}\{f(x)\} = 1/2$

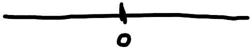
$$\pi(1+r) = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi = \frac{1}{2(1+r)}$$

Χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα (financial derivatives)

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα είναι συμβόλαια (contracts) τα οποία καθορίζουν μια συμφωνία η οποία πρόκειται να υλοποιηθεί στο μέλλον και η αξία της εξαρτάται από κάποια πρωτογενή προϊόντα (underlying assets).

Βασικά πρωτογενή προϊόντα

- Μετοχές
- Ομόλογα
- Νομίσματα
- Αγαθά



Στοχαστική διαδικασία

Συλλογή τυχαίων μεταβλητών οι οποίες περιγράφουν την εξέλιξη κάποιου στοχαστικού (μη ντετερμινιστικού συστήματος) με το χρόνο.

Παράδειγμα : Τυχαίος περίπατος

- Κίνηση στον πραγματικό άξονα σε διακριτές χρονικές στιγμές
- Αρχική θέση $X_0 = 0$
- Κίνηση στον διακριτό χρόνο i

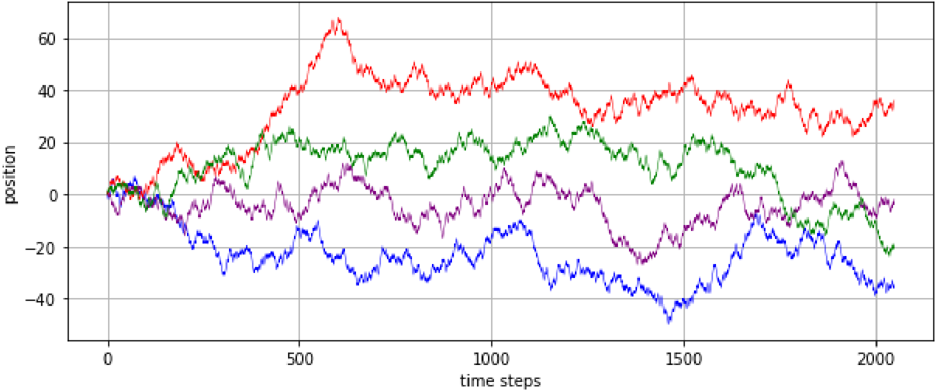
$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } p \\ -1, & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases}, \; p \in (0,1)$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def random_walk(p=0.5,T=2048):
    S = [0]
    for i in range(1,T+1):
        step = -1.
        if np.random.rand() < p:
            step = 1.
        S.append(S[i-1]+step)
    return S

S0 = random_walk()
S1 = random_walk()
S2 = random_walk()
S3 = random_walk()

plt.figure(figsize=(10,4))
plt.plot(S0,c='blue',lw=0.5)
plt.plot(S1,c='purple',lw=0.5)
plt.plot(S2,c='red',lw=0.5)
plt.plot(S3,c='green',lw=0.5)
plt.xlabel('time steps')
plt.ylabel('position')
plt.grid()
```

$\sim U[0,1]$

0.5

Στοχαστικές διαδικασίες



Χρόνος

- Διακριτός: $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$
- Συνεχής: $\mathbb{T} = [0, T]$

Προϊόν χωρίς κίνδυνο (risk-free asset)

- Επιτόκιο r

$$S_t^0 = \begin{cases} S_0^0 (1+r)^t, & \mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\} \\ S_0^0 e^{rt}, & \mathbb{T} = [0, T] \end{cases} \qquad t \in \mathbb{T}$$

- Γνωρίζουμε τις μελλοντικές τιμές του προϊόντος.

Ομόλογο (bond)

- Επιτόκιο r, τιμή όψεως α

Παράμετρος

$$\alpha e^{-rT} € \xrightarrow{T} \alpha €$$

$$B(t;T) = \alpha \frac{S_t^0}{S_T^0} = \alpha e^{r(t-T)} \qquad t \in [0, T]$$

$S_0 = 1000$ € $K = 900$ €   A 1100 €
B 700 €

Προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract)

- Αφορά ένα πρωτογενές προϊόν με τιμή που περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία S_t.
- Ο αγοραστής πρέπει να αγοράσει το προιόν κατά τον χρόνο ορίμανσης (maturity time) T στην συμφωνημένη τιμή άσκησης (strike price) K.
- Το συμβόλαιο έχει απόδοση (για τον αγοραστή)

$$\text{Payoff}(S_T) = S_T - K.$$

A 1100 − 900 = 200 €

B 700 − 900 = −200 €

$S_0 = 1000$ € $\quad K = 900$ € $\quad$ (A) $S_T = 1100$ € $\quad$ (B) $S_T = 700$ €

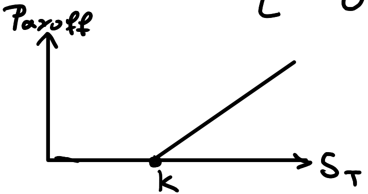
Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European call option)

- Αφορά ένα πρωτογενές προϊόν με τιμή που περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία S_t.
- Ο αγοραστής διατηρεί το δικαίωμα να αγοράσει το προϊόν κατά τον χρόνο ορίμασνης (maturity time) T στην συμφωνημένη τιμή άσκησης (strike price) K.
- Το συμβόλαιο έχει απόδοση (για τον αγοραστή)

$$\text{Payoff}(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{Εαν } S_T - K > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(A) $1100 - 900 = 200$ €

(B) $(700 - 900)_+ = 0$ €



$S_0 = 1000$ $K = 900€$ $T = 1y$

$S_T = 1500 \Rightarrow \text{Payoff} = 0$

$S_T = 500€ \Rightarrow \text{Payoff} = 900 - 500 = 400€$

Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (European put option)

- Αφορά ένα πρωτογενές προϊόν με τιμή που περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία S_t.
- Ο αγοραστής διατηρεί το δικαίωμα να πουλήσει το προϊόν κατά τον χρόνο T στην συμφωνημένη τιμή άσκησης (strike price) K.
- Το συμβόλαιο έχει απόδοση (για τον αγοραστή)

$$\text{Payoff}(S_T) = (K - S_T)_+$$

Αμερικάνικό δικαίωμα αγοράς (American call option)

- Αφορά ένα πρωτογενές προϊόν με τιμή που περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία S_t.
- Ο αγοραστής διατηρεί το δικαίωμα να αγοράσει μέχρι και τον χρόνο T στην συμφωνημένη τιμή άσκησης (strike price) K.
- Το συμβόλαιο έχει θετική απόδοση (για τον αγοραστή)

Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης (American put option)

- Αφορά ένα πρωτογενές προϊόν με τιμή που περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία S_t.
- Ο αγοραστής διατηρεί το δικαίωμα να πουλήσει το προϊόν μέχρι και τον χρόνο T στην συμφωνημένη τιμή άσκησης (strike price) K.
- Το συμβόλαιο έχει θετική απόδοση (για τον αγοραστή)

Γιατί επινοήθηκαν ?

Put

1000 € → (A) 1500 €, 500 €

$K = S_0 = 1000$ € $T = 1y$

$\Pi = 100$ €

(A)

$S_T = 1500$ € $K = 1000$ €

$(K - S_T)_+ = (1000 - 1500)_+ = 0$ €

1500 € $- 100$ € $= 1400$ €

(B)

$(K - S_T)_+ = (1000 - 500)_+ = 500$ €

S_0

1000 € $+ 500 - 100$ € $= 1400$ €

Call option

$S_0 = 1000$ €

$K = S_0 = 1000$ € $T = 1y.$

$\Pi = 100$ €

(A) $S_T = 1500$ €

$(S_T - K)_+ = 500$ € $(-100$ €$)$

(B) $S_T = 500$ €

$(S_T - K)_+ = 0$ € $(-100$ €$)$

$500 - 1000$

Μοντέλο μεταβολής της τιμής ενός προϊόντος με το χρόνο

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

W_t - Brownian Motion

- t: Χρόνος
- W_t: Κίνηση Brown (Brownian motion)

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \Rightarrow \int_0^T dS_t = \mu \int_0^T S_t\, dt + \sigma \overbrace{\int_0^T S_t\, dW_t}^{\text{στοχαστικό ολοκλ.}}$$

$$S_T - S_0 = \mu \underbrace{\int_0^T S_t\, dt}_{\text{drift}} + \sigma \underbrace{\int_0^T S_t\, dW_t}_{\text{stochastic}}$$

Στην επόμενη διάλεξη θα περάσουμε σε πιο αυστηρή διατύπωση των στοχαστικών διαδικασιών.