ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

16η διάλεξη - 23.12.2022

δείξαμε ότι

$$V_0 = S_0\left(1 - \Phi(c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T})\right) - \exp(-rt)K\left(1 - \Phi(c/\sqrt{T})\right)$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$V_0 = S_0\Phi(-c/\sqrt{T} + \sigma\sqrt{T}) - \exp(-rt)K\Phi(-c/\sqrt{T})$$

Η σταθερά c δίνεται

$$c = \left(-\log\frac{S_0}{K^*} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)/\sigma = -\left(\log\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right)/\sigma$$

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - \mathsf{exp}(-rt)K\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\mathsf{log}\,\frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\mathsf{log}\,\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Για μια μετοχή με αρχική τιμή $S_0 = 2.4$, σε ένα χρόνο μπορεί να έχει τιμή $S_1 = 4.8$ ή $S_1 = 1.2$. Εάν υπάρχει ομόλογο με επιτόκιο $r = 0.2$, τιμολογήστε το παράγωγο με συνάντηση ανταμοιβής $C_1 = S_1^2$.

S_t , B_t

$V_0 = C_0 \qquad V_t = C_t \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad t$

$$B_0 = \frac{1}{1+0.2}€ \rightarrow B_t = \frac{(1+r)}{(1+r)^1}\Big|_{t=1} = 1$$

$$V_t = \alpha S_t + b B_t$$

$$C_1 \begin{array}{l} \xrightarrow{p} 4.8^2 = 23.04 € \\ \xrightarrow{1-p} 1.2^2 = 1,44 € \end{array}$$

$$\left(V_0 = \mathbb{E}_Q\left[V_1^*\right]\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \alpha\, 4.8 + b \cancel{B_1}^{1} = 23.04 \\ V_1 = \alpha\, 1.2 + b \cancel{B_1}^{1} = 1.44 \end{array}\right\} \Rightarrow 3{,}6\,\alpha = 21.6 \Rightarrow \alpha = 6$$

$$b = 1.44 - 6 \cdot 1.2 = -5.76$$

Άσκηση 1

Για μια μετοχή με αρχική τιμή $S_0 = 2.4$, σε ένα χρόνο μπορεί να έχει τιμή $S_1 = 4.8$ ή $S_1 = 1.2$. Εάν υπάρχει ομόλογο με επιτόκιο $r = 0.2$, τιμολογήστε το παράγωγο με συνάντηση ανταμοιβής $C_1 = S_1^2$.

$$C_0 = V_0 = 6 \cdot 2.4 - 5.76 \cdot \frac{1}{1.2} = 9.6 \text{ €}$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \overset{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$. Η τυχαία μεταβλητή $Y = X + \mu$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$ ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$. Υπολογίστε την παράγωγο Radon-Nikodym $\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

$\mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ $\qquad Y \overset{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 1)$

density under $\mathbb{Q}$ $= \dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ density under $\mathbb{P}$

$$f_{\mathbb{Q}}(y) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} y^2\right]$$

$$f_{\mathbb{P}}(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} x^2\right]$$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\left((x+\mu)^2 - x^2\right]\right.$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$. Η τυχαία μεταβλητή $Y = X + \mu$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$ ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$. Υπολογίστε την παράγωγο Radon-Nikodym $\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\cancel{x^2} + \mu^2 + 2x\mu - \cancel{x^2}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mu^2 + 2x\mu\right)\right]$$

$W_T^{\mathbb{Q}}$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = S_T^n$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$.

$W_T^{\mathbb{Q}}$

$$S_T = S_0 \exp\left[rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}\right]$$

$$C_T = S_0^n \exp\left[nrT - \frac{1}{2}\sigma^2 nT + \sigma n W_T^{\mathbb{Q}}\right] \rightsquigarrow C_T^* = e^{-rT} C_T$$

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[C_T^* \mid S_0\right] = e^{-rT}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[C_T\right] =$$

$$= S_0^n \exp\left[nrT - \frac{1}{2}\sigma^2 nT - rT\right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma n W_T^{\mathbb{Q}}}\right] = *$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma n W_T^{\mathbb{Q}}}\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 T\right]$$

$$* = S_0^n \exp\left[nrT + \frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1)T - rT\right]$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = S_T^n$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$.

$$\mathbb{P}: \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}$$

$$\mathbb{Q}: \quad \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Υπολογίστε τη διασπορά της αξίας για κάθε χρόνο $t \in [0, T]$.

$Var[S_t] = ;$ $\qquad S_t = S_0 \exp\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right]$

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0 \exp\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{\sigma W_t}\right]}_{e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t}} =$$

$$= S_0 \exp[\mu t]$$

$$Var[S_t] = \mathbb{E}[S_t^2] - \left(\mathbb{E}[S_t]\right)^2$$

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha X}\right] = e^{\alpha \mu_X + \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma_X^2}$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Υπολογίστε τη διασπορά της αξίας για κάθε χρόνο $t \in [0, T]$.

$$\mathbb{E}[S_t^2] = S_0^2 \exp[2\mu t - \sigma^2 t]\, \mathbb{E}[e^{2\sigma W_t}] =$$

$$= S_0^2 \exp[2\mu t - \sigma^2 t]\, e^{\frac{1}{2}4\sigma^2 t} =$$

$$= S_0^2 \exp[2\mu t + \sigma^2 t]$$

$$Var[S_t] = S_0^2 \exp[2\mu t]\left(\exp[\sigma^2 t] - 1\right)$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = \min(S_T, \epsilon S_0),\ \epsilon > 1$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$ εάν γνωρίζουμε $r = 0$.

$\varepsilon = 2 \qquad S_0 = 100\ € \qquad S_T = 150\ €$

$$\min(150, 2 \cdot 100) = 150\ €$$

$$S_T = S_0 \exp\left[rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}\right]$$

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[C_T \mid S_0\right]$$

$$S_T = \varepsilon S_0 \Rightarrow \cancel{S_0} \exp\left[\cancel{rT}^{\,0} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}\right] = \varepsilon \cancel{S_0}$$

Άσκηση 5

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = \min(S_t, \epsilon S_0),\ \epsilon > 1$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$ εάν γνωρίζουμε $r = 0$.

$$\cancel{rT}^{\,0} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^Q = \log \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma W_T^Q = \log \varepsilon + \frac{1}{2}\sigma^2 T \Rightarrow W_T^Q = \overbrace{\frac{1}{\sigma}\left(\log \varepsilon + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)}^{c}$$

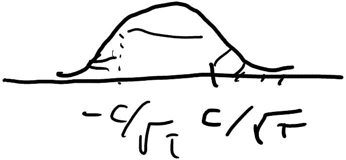
εάν $W_T^Q > c$ τότε $C_T = \varepsilon S_0$

εάν $W_T^Q < c$ τότε $C_T = S_T$

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}} C_T\, q(w)\, dw = \varepsilon S_0 \int_c^{\infty} q(w)\, dw + S_0 \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 T\right).$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = \min(S_t, \epsilon S_0),\ \epsilon > 1$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$ εάν γνωρίζουμε $r = 0$.

$$\int_{-\infty}^{c} e^{\sigma w} q(w)\, dw$$



$$\int_c^{\infty} q(w)\, dw = \int_c^{\infty} \frac{1}{(2\pi T)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w}{\sqrt{T}}\right)^2\right] dw = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{c/\sqrt{T}}^{\infty} \exp(-y^2)\, dy$$

$$y = \frac{w}{\sqrt{T}} \Rightarrow dw = \sqrt{T}\, dy$$

$$= \Phi\left(-c/\sqrt{T}\right)$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = \min(S_t, \epsilon S_0),\ \epsilon > 1$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$ εάν γνωρίζουμε $r = 0$.

$$\int_{-\infty}^{c} e^{\sigma w} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w}{\sqrt{T}}\right)^2\right] dw$$

$$\pm \sigma^2 T$$

$$= \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{w}{\sqrt{T}}\right)^2 - 2\sigma w\right]\right] dw$$

$$= \cancel{k}$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = \min(S_t, \epsilon S_0),\ \epsilon > 1$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$ εάν γνωρίζουμε $r = 0$.

$$\frac{\cancel{w}}{\sqrt{T}}\xi = \sigma \cancel{w} \Rightarrow \xi = \sigma\sqrt{T}$$

$$* = \exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2 T\right]\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{1}{2}\Big(\overbrace{\frac{w}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}}^{\eta}\Big)^2\right] dw$$

Άσκηση 5

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Για το παράγωγο με συνάρτηση ανταμοιβής $C_T = \min(S_t, \epsilon S_0),\ \epsilon > 1$. Εκφράστε τη τιμή του παραγώγου στο χρόνο $t = 0$ εάν γνωρίζουμε $r = 0$.

$$dw = \sqrt{T}\, dy$$

Τυπική κανονική κατανομή

$$* = \exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2 T\right] \int_{-\infty}^{c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T}} p(y)\, dy =$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}\sigma^2 T\right] \Phi\left(c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T}\right)$$