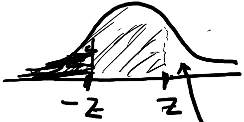
ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

15η διάλεξη - 19.12.2022



δείξαμε ότι

αρχική τιμή της μετοχής

$$V_0 = S_0\left(1 - \Phi(\underbrace{c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T}}_{z})\right) - \exp(-rt)K\left(1 - \Phi(c/\sqrt{T})\right)$$

$\Phi(z)$

" $\mathbb{P}(Z \le z)$

$1 - \mathbb{P}(Z \le z)$

" $\mathbb{P}(Z \le -z)$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$V_0 = S_0\Phi(\underbrace{-c/\sqrt{T} + \sigma\sqrt{T}}_{d_1}) - \exp(-rt)K\Phi(\underbrace{-c/\sqrt{T}}_{d_2})$$

Η σταθερά c δίνεται

$$c = \left(-\log\frac{S_0}{K^*} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)/\sigma = -\left(\log\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right)/\sigma$$

strike price

$$K^* = Ke^{-rT} \qquad \frac{S_0}{K^*} = \frac{S_0}{K}e^{rT} \Rightarrow \log\frac{S_0}{K^*} = \log\frac{S_0}{K} + rT$$

$$V_0 = S_0\Phi(d_1) - \mathsf{exp}(-rt)K\Phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\mathsf{log}\,\frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\mathsf{log}\,\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Άσκηση 1

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes, υπολογίστε την πιθανότητα $S_{2t} > 2S_t$ για κάποιο δοσμένο χρόνο t.

$$S_0 > 0$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \Rightarrow S_t = S_0 \exp\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] \cdot \exp\left[\sigma W_t\right]$$

$$S_{2t} = S_0 \exp\left[\mu 2t - \frac{1}{2}\sigma^2 2t\right] \cdot \exp\left[\sigma W_{2t}\right]$$

$$S_{2t} > 2S_t \iff \exp\left[\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right] \exp\left[\sigma W_{2t}\right] > 2 \exp\left[\sigma W_t\right]$$

$$\Rightarrow \exp\left[\sigma(\underbrace{W_{2t} - W_t}_{\sqrt{t}\, Z})\right] > 2 \exp\left[-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right]$$

Έστω S_t ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes, υπολογίστε την πιθανότητα $S_{2t} > 2S_t$ για κάποιο δοσμένο χρόνο t.

$$W_{2t} - W_t \sim N(0, 2t - t) = N(0, t).$$

$$\sqrt{t}\, Z, \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\sigma \sqrt{t}\, Z > \log 2 - \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

$$Z > \underbrace{\frac{\log 2 - \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d}$$

$$\mathbb{P}(Z > d) = 1 - \mathbb{P}(Z < d)$$
$$= 1 - \Phi(d)$$

Έστω $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$ και $r = 0$. Βρείτε την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

$C_T = (S_T - K)_+$ Q ισοδύναμο μέτρο martingale

$V_0 = \mathbb{E}_Q[C_T | S_0] = \mathbb{E}_Q[C_T]$

$\varphi t + W_t$

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t = \sigma d\Big(\underbrace{\frac{\mu}{\sigma}t + W_t}_{W_t^Q}\Big)$$

$S_t = S_0 + \sigma W_t^Q$

Άσκηση 2

Έστω $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$ και $r = 0$. Βρείτε την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

$$S_T - K = \underline{S_0} + \sigma W_T^{\mathbb{Q}} \underline{- K}$$

$$(S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{εαν} \quad S_T > K \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)_+\right] = \int_{\mathbb{R}} (S_0 - K + \sigma w)_+ \, q(w)\, dw = \circledast$$

$$S_0 - K + \sigma w > 0 \Rightarrow \sigma w > K - S_0 \Rightarrow w > \boxed{\frac{K - S_0}{\sigma}}^{\,c}$$

$$\circledast = \int_c^{\infty} (\underbrace{S_0 - K} + \sigma w) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{w}{\sqrt{T}}\right)^2\right) dw$$

Για το μοντέλο Black-Scholes, βρείτε την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς για τις παρακάτω παραμέτρους

$$S_0 = 100\,€,\ \sigma = 0.1,\ r = 0.05,\ K = 100,\ T = 1$$

$\log \frac{S_0}{K} = 0$ $d_1 = \frac{0.05 + 0.5 \cdot 0.01}{0.1} = \frac{0.05 + 0.005}{0.1} = 0.55$

$d_2 = d_1 - 0.1 = 0.45$

$V_0 = \underbrace{100}_{S_0} \Phi(0.55) - \underbrace{\exp(-0.05)}_{=0.9512} \underbrace{100}_{K} \Phi(0.45) =$

$= 6.807\,€$

European Basket Call Option

$C_T = \left(\frac{1}{2}\left(S_T^{(1)} + S_T^{(2)}\right) - K\right)_+$

Άσκηση 4

Μια μετοχή έχει τιμή $S_0 = 50$ ευρώ, και σε ένα χρόνο μπορεί να έχει μια από τις τρεις τιμές: $40, 55, 70$. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ισοδύναμο μέτρο martingale ισχύει $\mathbb{Q}[S_1 = 40] \in (1/3, 2/3)$. Δίνεται $r = 0$.

$$S_0 = 50€ \quad \begin{cases} \xrightarrow{p_1} 40€ \\ \xrightarrow{p_2} 55€ \\ \xrightarrow{p_3} 70€ \end{cases}$$

S_1

Θέλουμε $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 > 0$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = 1 - q_1 - q_3}. \Rightarrow q_3 = 1 - q_1 - q_2$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] = 40 q_1 + 55 q_2 + 70 q_3 = 50 \quad \checkmark$$

$$40 q_1 + 55(1 - q_1 - q_3) + 70 q_3 = 50$$

$$40 q_1 + 55 - 55 q_1 - 55 q_3 + 70 q_3 = 50$$

Άσκηση 4

Μια μετοχή έχει τιμή $S_0 = 50$ ευρώ, και σε ένα χρόνο μπορεί να έχει μια από τις τρεις τιμές: $40, 55, 70$. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ισοδύναμο μέτρο martingale ισχύει $\mathbb{Q}[S_1 = 40] \in (1/3, 2/3)$. Δίνεται $r = 0$.

< 1

> 0

$$-15q_1 + 15q_3 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{q_3}} = q_1 - \frac{1}{3}$$

$$q_1 - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \boxed{q_1 > 1/3}$$

$$40q_1 + 55q_2 + 70(1 - q_1 - q_2) = 50$$

$$\boxed{q_1 < 2/3}$$

$$\Uparrow$$

$$-30q_1 - 15q_2 = -20 \Rightarrow q_2 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3} - \cancel{2}q_1 > 0$$

Άσκηση 5

Έστω σε μια αγορά με $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ υπάρχουν δυο μετοχές με ρίσκο S_t, X_t και κανένα προϊόν χωρίς ρίσκο. Εάν $S_0 = X_0 = 100$ με $S_1 = 90$ ή $S_1 = 110$ και $X_1 = 80$ ή $X_1 = 120$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι εάν αυξηθεί η αξίας της μιας μετοχής το ίδιο θα συμβεί και με την αξία της άλλης. $K = 100$

Βρείτε τη τιμή για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που αφορά την μετοχή S_t.

$\left.\begin{matrix} S_0 \\ X_0 \end{matrix}\right] 100$ €

$S_1 < \begin{matrix} 90 € \\ \underline{110 €} \end{matrix}$

$X_1 < \begin{matrix} 80 € \\ \underline{120 €} \end{matrix}$

$\mathbb{P}(S_1 = 110 \mid X_1 = 120) = 1$

$\mathbb{P}(X_1 = 120 \mid S_1 = 110) = 1$

$C_T = (S_T - K)_+$

$V_t = \alpha S_t + b X_t$

θέλω

$V_T = C_T$

Άσκηση 5

Έστω σε μια αγορά με $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ υπάρχουν δυο μετοχές με ρίσκο S_t, X_t και κανένα προϊόν χωρίς ρίσκο. Εάν $S_0 = X_0 = 100$ με $S_1 = 90$ ή $S_1 = 110$ και $X_1 = 80$ ή $X_1 = 120$.
Επιπλέον γνωρίζουμε ότι εάν αυξηθεί η αξίας της μιας μετοχής το ίδιο θα συμβεί και με την αξία της άλλης.
Βρείτε τη τιμή για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που αφορά την μετοχή S_t.

$$C_T \begin{array}{l} \nearrow (90-100)_+ = 0 \quad (I) \\ \searrow (110-100)_+ = 10 \end{array}$$

$$(I) \quad \left.\begin{array}{l} \alpha 90 + b80 = 0 \\ \alpha 110 + b120 = 10 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = -0.4 \\ \beta = 0.45 \end{array}$$

Άσκηση 5

Έστω σε μια αγορά με $\mathbb{T} = \{0, 1\}$ υπάρχουν δυο μετοχές με ρίσκο S_t, X_t και κανένα προϊόν χωρίς ρίσκο. Εάν $S_0 = X_0 = 100$ με $S_1 = 90$ ή $S_1 = 110$ και $X_1 = 80$ ή $X_1 = 120$.
Επιπλέον γνωρίζουμε ότι εάν αυξηθεί η αξίας της μιας μετοχής το ίδιο θα συμβεί και με την αξία της άλλης.
Βρείτε τη τιμή για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς που αφορά την μετοχή S_t.

$V_0 = -0.4 \cdot 100 + 0.45 \cdot 100 = 0.05 \cdot 100 = 5€$