ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

14η διάλεξη - 9.12.2022

Έστω χρηματοοικονομικό παράγωγο σε μια χρηματοοικονομική αγορά με μοναδικό προϊόν με ρίσκο S που ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes.

Τιμή του παραγώγου στον χρόνο $t = 0$

$x \to S$

$$V(S,0) = \exp\left(\alpha \log S + \beta \frac{\sigma^2 T}{2}\right) w\left(\underset{x}{\log S}, \frac{\sigma^2 T}{2}\right)$$

όπου w η λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0, \frac{\sigma^2}{2} T]$$

$$w(x,0) = \exp(-ax)\text{payoff}(e^x)$$

Επιπλέον,

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\kappa - 1),\ \beta = -\frac{1}{4}(\kappa+1)^2,\ \kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Η λύσης της εξίσωσης θερμότητας δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, 0) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi$$

$$\text{payoff}(e^x) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq x < 0 \\ 1, & x \in [0, \log 2] \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$$C_T = \begin{cases} 0, & 0 \leq S_T < 1 \\ 1, & 1 \leq S_T \leq 2 \\ 0, & S_T > 2 \end{cases}$$

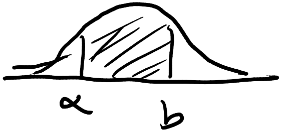
$$e^{\xi} = 1 \Rightarrow \xi = 0$$

$$e^{\xi} = 2 \Rightarrow \xi = \log 2$$

$$w(\xi, 0) = \exp(-\alpha \xi)\, \mathbb{1}_{[e^{\xi} \in [1,2]]}(\xi)$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{\log 2} \underbrace{\exp(-\alpha\xi)} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi$$

$$\int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right) d\eta = \int_{-\infty}^{b} \cdots - \int_{-\infty}^{a} =$$



$$= \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\exp\left(-a\xi - \frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2a\xi + \frac{(x-\xi)^2}{2t}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{4a\xi t + x^2 + \xi^2 - 2x\xi}{2t}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + \xi^2 - 2\xi(x - 2at)}{2t}\right)\right] = *$$

$$(x - 2at)^2 = x^2 + 4a^2t^2 - 4axt$$

$$= \exp\left[a^2 \quad - ax\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - x + 2at}{\sqrt{2t}}\right)^2\right]$$

Θέτουμε $\eta = \dfrac{\xi - x + 2at}{\sqrt{2t}}$ $\quad d\eta = \dfrac{d\xi}{\sqrt{2t}}$

$$w(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, \exp\left[a^2 - ax\right] \cdot$$

$$\cdot \int_{\frac{-x+2at}{\sqrt{2t}}}^{\frac{\log 2 - x + 2at}{\sqrt{2t}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\eta^2\right] d\eta =$$

$$= \exp\left[a^2 - ax\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\eta^2\right] d\eta =$$

$$= \exp\left[\alpha^2 - \alpha x\right] \cdot \left(\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1) \right)$$

Παράδειγμα

Έστω χρηματοοικονομικό παράγωγο σε μια χρηματοοικονομική αγορά με μοναδικό προϊόν με ρίσκο S που ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Θεωρούμε το παράγωγο με ανταμοιβή

$$C_T = \begin{cases} 1, & S_T > K \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$\exists Q \sim \mathbb{P}$, S_T^* Q - martingale

$$V_0 = \mathbb{E}_Q [C_T^* | S_0] \qquad \left(V_t^* = \mathbb{E}_Q [C_T^* | \mathcal{F}_t] \right)$$

$$V_0^* \; " \; e^{-rT} \mathbb{E}_Q [C_T] = *$$

$$\rightarrow S_T^* = S_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^Q \right]$$

$$= e^{-rT} \mathbb{Q}[S_T > K] =$$

$$= e^{-rT} \mathbb{Q}[S_T^* > K^*]$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}[S > K] \, q(s) \, ds$$

$$= \int_K^\infty q(s) \, ds$$

$$\mathbb{Q}[S > K]$$

$$S_T^* > K^*$$

$$\log S_T^* = \log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}$$

$$\log S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}} > \log K^*$$

$$\sigma W_T^{\mathbb{Q}} > \log K^* - \log S_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

$$W_T^{\mathbb{Q}} > \underbrace{\left(-\log\frac{S_0}{K^*} + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)/\sigma}_{c}$$

$$\mathbb{Q}\left[S_T^* > K^*\right] = \mathbb{Q}\left[W_T^{\mathbb{Q}} > c\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2T}}\,dw$$

$$\xi = \frac{w}{\sqrt{T}}$$

$$d\xi = \frac{dw}{\sqrt{T}}$$

$$dw = \sqrt{T}\,d\xi.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c/\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = 1 - \Phi(c/\sqrt{T})$$

$$V_0 = e^{-rt}\left(1 - \Phi(c/\sqrt{T})\right)$$

Παράδειγμα - Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

Έστω χρηματοοικονομικό παράγωγο σε μια χρηματοοικονομική αγορά με μοναδικό προϊόν με ρίσκο S που ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes. Θεωρούμε το παράγωγο με ανταμοιβή

$$C_T = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = (S_T - K)_+$$

$$V_0 = \mathbb{E}_Q\left[C_T^* \mid S_0 \right] =$$

$$= \mathbb{E}_Q\left[(S_T^* - K^*)_+ \right]$$

$$S_T^* = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^Q \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\mathbb{R}} (S_T^* - K^*)_+ e^{-\frac{1}{2T} w^2} dw = *$$

$$\mathbb{E}[f(x)] = \int f(x) e$$

$$S_T^* > K^* \Rightarrow W_T^{\mathbb{Q}} > c$$

$$* = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_c^{\infty} (S_T^* - K^*) \, e^{-\frac{1}{2T} w^2} dw =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_c^{\infty} \left(S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma w\right) - K^* \right) e^{-\frac{1}{2T} w^2} dw$$

Τιμολόγηση με την μέθοδο του ισοδύναμου μέτρου martingale

$$\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^\infty S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\exp(\sigma w)\exp\left(-\frac{1}{2T}w^2\right)dw}^{\mathrm{I}}$$

$$-\frac{K^*}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^\infty \overbrace{e^{-\frac{1}{2T}w^2}}^{\mathrm{II}}\,dw$$

$$\mathrm{I} = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^\infty \exp\left(\sigma w - \frac{1}{2T}w^2\right)dw$$

$$= S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c/\sqrt{T}}^{\infty} \exp\left(\sigma\sqrt{T}\xi - \frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi$$

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{T}} \qquad d\xi = \frac{dx}{\sqrt{T}}$$

$$\eta = \xi - \sigma\sqrt{T}$$

$$= S_0 \int_{c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\eta^2\right] d\eta$$

$$= S_0 \left[1 - \Phi\left(c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T}\right)\right]$$

$$V_0 = S_0\left(1 - \Phi\left(c/\sqrt{T} - \sigma\sqrt{T}\right)\right) -$$

$$- \exp(-rT)\, K \left(1 - \Phi\left(c/\sqrt{T}\right)\right)$$

$$C_T = (S_T - K)_+$$