ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

12η διάλεξη - 2.12.2022

$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[V_T^* \mid S_0 \right]$ $\quad V_T = C_T$

$V_t \geq 0$

Έστω μια πλήρης χρηματοοικονομική αγορά στην οποία δεν υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας. Για κάθε παράγωγο με ανταμοιβή C_T μπορούμε έχουμε χαρτοφυλάκιο τέτοιο ώστε $V_T = C_T$. Έστω επιπλέον ότι C_t συμβολίζει γενικά την τιμή του παραγώγου στο χρόνο t. Τότε:

$$C_t^* = V_t^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T^* | \mathcal{F}_t\right] \qquad t \in [0, T]$$

όπου $\mathbb{Q}$ το ισοδύναμο μέτρο martingale.

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ $\qquad \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

$\mathbb{E}[S_t^* \mid \mathcal{F}_s] = S_s^*$

$$S_t^* = \begin{cases} (1+r)^{-t} S_t & \text{διακριτη} \quad t \in \{0, 1, \ldots, T\} \\ e^{-rt} S_t & \text{συνεχη} \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

$V_T = C_T \Rightarrow \boxed{V_t = C_t \quad \forall t \leq T}$

S_t^* - Q martingale

$\mathbb{E}_{Q}[V_T^* / \mathcal{F}_t] = V_t^* = C_t^*$

Εαν $\exists\, t_0$ τ.ω $C_{t_0} \neq V_{t_0}$ $\qquad T' = t_0$

$C_t^* \xrightarrow[* e^{rt}]{* (1+r)^t} C_t$, $\quad \underline{\underline{t=0}}$ $\quad \boxed{C_0^* = C_0}$

Εφαρμογή

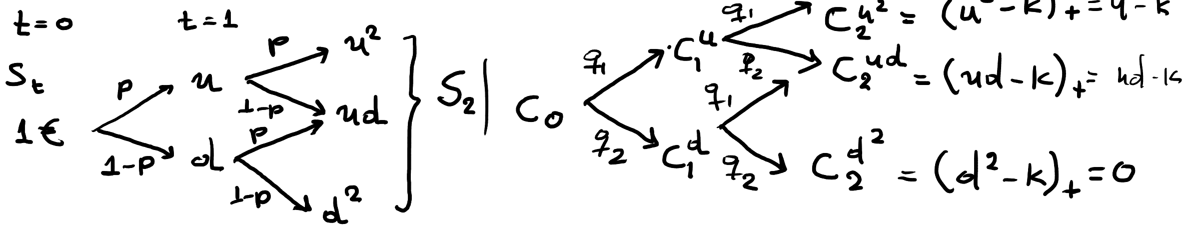
Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για τις ακόλουθες παραμέτρους

$p \in (0,1)$

$$C_T = (S_T - K)_+ \geq 0$$

για τις τιμές μας

$$\mathbb{T} = \{0, 1, 2\},\ S_0 = 1,\ u = 1.1,\ d = 0.8,\ r = 0.05,\ K = 0.8$$



① $Q \sim \mathbb{P}$, Q martingale για S_t^*

② $C_0 = \mathbb{E}_Q [V_T^* \mid S_0 = 1€]$

Τιμολόγηση σε συνθήκες μη επιτηδειότητας

$$\begin{tikzcd} & S_{t+1}^{*u} \\ S_t^* \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & S_{t+1}^{*d} \end{tikzcd}$$

Θέλουμε ν.δ.

$$\mathbb{E}_Q\left[S_{t+1}^* \mid \mathcal{F}_t\right] = S_t^*$$

$$S_t^* = (1+r)^{-t} S_t \qquad S_{t+1}^* = (1+r)^{-t-1} S_{t+1}$$

$$S_{t+1}^{*u} = (1+r)^{-t}(1+r)^{-1} u S_t = (1+r)^{-1} u S_t^*$$

$$S_{t+1}^{*u} = u(1+r)^{-1} S_t^*$$

$$S_{t+1}^{*d} = d(1+r)^{-1} S_t^*$$

$$\mathbb{E}_Q\left[S_{t+1}^* \mid \mathcal{F}_t\right] = q u (1+r)^{-1} S_t^* + (1-q) d (1+r)^{-1} S_t^*$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \left[q u (1+r)^{-1} + (1-q) d (1+r)^{-1} \right] S^*_t$$

$$\Rightarrow \quad q u (1+r)^{-1} + (1-q) d (1+r)^{-1} = 1$$

$$q u (1+r)^{-1} + d (1+r)^{-1} - q d (1+r)^{-1} = 1. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{1+r-d}{u-d} \in (0,1)$$

πρεπει

$$1+r-d < u-d$$

$$1+r < u$$

$$q_1 = q, \quad q_2 = 1-q$$

$V_2^* = C_2^*$

$$\mathbb{E}_Q\left[V_2^* \mid S_0 = 1\right] = q_1^2 (1+r)^{-2} u^2 + 2 q_1 q_2 (1+r)^{-2} ud + q_2^2 (1+r)^{-2} d^2 = C_0$$

$C_2^{u^2}$ με πιθανότητα q_1^2

C_2^{ud} με πιθανότητα $2 q_1 q_2$

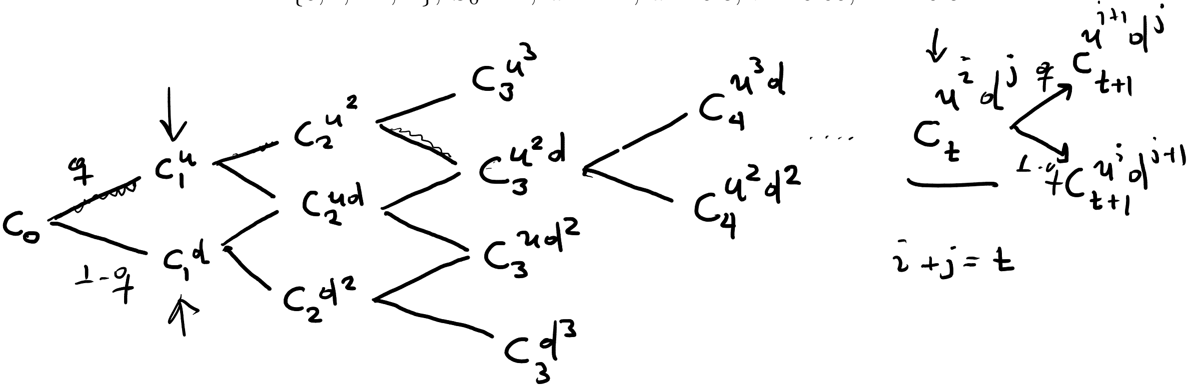
$C_2^{d^2}$ με πιθανότητα q_2^2

$$q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2 = (q_1 + q_2)^2 = 1.$$

Εφαρμογή

Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για τις ακόλουθες παραμέτρους

$$\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\},\ S_0 = 1,\ u = 1.1,\ d = 0.8,\ r = 0.05,\ K = 0.8$$



$$C_t^{u^i d^j} = ;$$

τον κόμβο που θέλω να υπολογίσω την αξία του

$$C_t^{*u^i d^j} = \mathbb{E}_Q \left[C_{t+1}^{*} \mid \mathcal{F}_t^{u^i d^j} \right] =$$

$$= q_1 (1+r)^{-t-1} C_{t+1}^{u^{i+1} d^j} + q_2 (1+r)^{-t-1} C_{t+1}^{u^i d^{j+1}}$$

$t = T \rightarrow$ υπολογίζω κόμβους που ανήκουν στο επίπεδο $T-1$

$\delta V_t = \alpha_t \delta S_t + b_t \delta B_t \quad V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t =$

$= \alpha_{t+1} S_t + b_{t+1} B_t$

Δουλεύουμε στο συνεχή χρόνο $\mathbb{T} = [0, T]$

Η συνθήκη αυτοχρηματοδότησης παίρνει την μορφή

$$\underline{dV_t} = a_t \underline{dS_t} + b_t \underline{dB_t}, \ \forall t \in \mathbb{T}$$

Θα ασχοληθούμε με το μοντέλο Black-Scholes, δηλαδή

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = (\mu - r)\, dt + \sigma dW_t$$

Θα δείξουμε ότι $dS_t^* = (\mu - r)S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t$, όπου $S_t^* = e^{-rt} S_t$.

- Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε το ισοδύναμο μέτρο martingale.

$$dS_t^* = d(e^{-rt} S_t) = e^{-rt} dS_t + S_t d(e^{-rt}) + d[e^{-rt}, S_t]$$

$$d[e^{-rt}, S_t] = d(e^{-rt}) \cdot dS_t = -r e^{-rt} dt \cdot (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)$$

$$= 0$$

$$dS_t^* = e^{-rt} dS_t - r e^{-rt} S_t \, dt$$

Θα δείξουμε ότι $dS_t^* = (\mu - r)S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t$, όπου $S_t^* = e^{-rt}S_t$.

- Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε το ισοδύναμο μέτρο martingale.

$$dS_t^* = e^{-rt}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - r e^{-rt} S_t dt =$$

$$= \mu S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t - r S_t^* dt =$$

$$= (\mu - r) S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t$$

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = (\mu - r) dt + \sigma dW_t$$

Έστω W_t κίνηση Brown. Συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας της με $\mathbb{P}$. Μπορούμε να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε η στοχαστική διαδικασία $W_t^{\mathbb{Q}} = \phi t + W_t$ να είναι κίνηση Brown ως προς το μέτρο $\mathbb{Q}$.

$W_t^{Q} = \phi t + W_t$, $\phi \neq 0$ $\quad W_t^{Q} \overset{\mathbb{P}}{\sim} N(\phi t, t)$

θέλω $Q \sim \mathbb{P}$ τ.ω $W_t^{Q} \overset{Q}{\sim} N(0,t)$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W_t^{Q}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\phi t] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W_t] = \phi t$$

$w' = \phi t + w$

$$q(w') = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2t}(w')^2\right] =$$

$$= (2\pi t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2t}(\varphi t + w)^2\right] =$$

$$= (2\pi t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2t}\left(\varphi^2 t^2 + w^2 + 2\varphi t w\right)\right] =$$

συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^2 t - \varphi w\right] p(w)$$

για $\mathbb{P}$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^2 t - \varphi w\right]$$

Radon-Nikodym.

$$q = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\, p$$

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = (\mu - r)dt + \sigma dW_t = d\left((\mu-r)t + \sigma W_t\right) =$$

$$= \sigma d\left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t\right) = \left(\text{θέτουμε } \varphi = \frac{\mu - r}{\sigma}\right)$$

$$= \sigma d(\varphi t + W_t) = \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$S_t^* = S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{\sigma W_t^{\mathbb{Q}}}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_t^* \mid \mathcal{F}_s\right] = S_s^*$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{\sigma W_t^{\mathbb{Q}}} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma W_t^{\mathbb{Q}}} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma(W_t^{\mathbb{Q}} - W_s^{\mathbb{Q}})} e^{\sigma W_s^{\mathbb{Q}}} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= e^{\sigma W_s^{\mathbb{Q}}}\, \mathbb{E}\left[e^{\sigma(\underbrace{W_t^{\mathbb{Q}} - W_s^{\mathbb{Q}}}_{\mathcal{N}(0,\, t-s)})}\right] =$$

$$= e^{\sigma W_s^{\mathbb{Q}}}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)}$$

άρα

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_t^* \mid \mathcal{F}_s\right] = S_s^* \quad \checkmark$$