ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

11η διάλεξη - 28.11.2022

Μια πεπερασμένη χρηματοοικονομική αγορά (A finite financial market)

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t = \alpha_{t+1} S_t + b_{t+1} B_t$$

Παραδεκτή στρατηγική (admissible strategy)

1. Αυτοχρηματοδοτούμενη
2. $V_t \geq 0, \forall t \in \mathbb{T}$

χειρότερο σενάριο $\exists t \in [0,T]$ τ.ω $V_t = 0$

Εφικτό (attainable) χρηματοοικονομικό παράγωγο

Ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο με ανταμοιβή C_T (πχ European Call Option) ονομάζεται εφικτό (attainable) εάν υπάρχει παραδεκτή στρατηγική που αναπαράγει το C_T, δηλαδή $V_T = C_T$.

Ευκαιρία επιτηδειότητας (arbitrage opportunity)

1. Παραδεκτή στρατηγική
2. $V_0 = 0$
3. $\mathbb{E}[V_T] > 0$ $\quad \mathbb{P}[V_T > 0] > 0$

$$(1+r)^{-T} \xrightarrow{T} 1$$

Έχοντας τη στοχαστική διαδικασία S_t επιθυμούμε να εκφράζουμε την τιμή σε κάθε χρονική στιγμή ως προς τη σημερινή αξία του χρήματος.

$$S_t^* = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+r)^t} S_t, & \text{(διακριτός χρόνος)} \\ e^{-rt} S_t, & \text{(συνεχής χρόνος)} \end{cases}$$

$$V_t^* = \frac{1}{(1+r)^t} V_t$$

$$V_t^* = \alpha_t S_t^* + b_t B_t^*$$

Αλλαγή μέτρου πιθανότητας

Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$q_1 \neq p$

$$(\Omega = \{\omega_1, \omega_2\},\ \mathcal{F} = 2^{\Omega},\ \mathbb{P})$$

$\mathbb{Q}(\{\omega_1\}) = q_1 > 0$ $\quad \mathbb{Q}(\{\omega_2\}) = q_2 > 0,\ q_1 + q_2 = 1$

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = p,\ \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1 - p,\ p \in (0, 1)$$

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

Ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας

Θα λέμε ότι τα μέτρα $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμα και θα γράφουμε $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ αν ισχύει

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ ανν } \mathbb{Q}(A) = 0$$

θεωρούμε τυχαία μεταβλητή X στο Ω του παραδείγματος. Μπορούμε να εκφράσουμε την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής για τα μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$.

- Θα συμβολίζουμε τις αντίστοιχες αναμενόμενες τιμές με $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$ και $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$, αντίστοιχα.

Για $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\Lambda X)$$

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

όπου $\Lambda(\omega) = \dfrac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} > 0.$ $\Longleftrightarrow$ $\Lambda(x) = \dfrac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)}$ $\quad \mathbb{Q}(\{\omega_1\}) = q_1 > 0, \ \mathbb{Q}(\{\omega_2\}) = q_2 >$

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad X = \begin{cases} x_1, & \{\omega_1\} : \text{με πιθανοτητα } p = p_1 \\ x_2, & \{\omega_2\} : \text{με πιθανότητα } 1-p = p_2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = x_1 q_1 + x_2 q_2 = x_1 \cdot \frac{q_1}{p_1} p_1 + x_2 \frac{q_2}{p_2} p_2 =$$

$$\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = x_1 p + x_2 (1-p) \right)$$

$$= x_1 \Lambda_1 p_1 + x_2 \Lambda_2 p_2$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X\Lambda]$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}), X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$(\Omega = \mathbb{R},\ \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{Q}), \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, 1),\ \text{για κάποιο } \underline{\mu \neq 0}$$

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A f_\mu(x)dx = \int_A d\mathbb{Q}$$

$$d\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(dx) = f_\mu(x)dx$$

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) \neq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X\right]$

Παράγωγος Randon-Nikodym

$x^2 + \mu^2 - 2x\mu$

$$f_\mu(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right\} = \exp\left\{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\right\} \underbrace{(2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}}_{\mathcal{N}(0,1)\ \mathbb{P}} = \Lambda(x) f_0(x)$$

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \Lambda(x)\mathbb{P}(dx), \quad \Lambda = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2\right\}$$

Θεώρημα

Υποθέτουμε μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε S_t^* είναι $\mathbb{Q}$-martingale. Τότε για κάθε παραδεκτή στρατηγική έχουμε ότι V_t^* είναι επίσης $\mathbb{Q}$-martingale.

- Σχεδόν έχουμε μια συνθήκη που να μας εξασφαλίζει μη επιτηδειότητα (no arbitrage). Μηδενική αξία αρχικά δίνει μηδενική αξία στο μέλλον.
- Το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ εν γένει δεν ταυτίζεται με το πραγματικό μέτρο που περιγράφει το μοντέλο εξέλιξης τιμών.

$$\mathbb{E}_Q\left[S^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = S^*_t \Rightarrow \mathbb{E}_Q\left[V^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = V^*_t$$

$$V_t = \alpha_t S_t + b_t B_t \Rightarrow \frac{1}{(1+r)^t} V_t = \alpha_t \frac{1}{(1+r)^t} S_t + b_t \frac{\cancel{(1+r)^t}}{(1+r)^T} \cdot \frac{1}{\cancel{(1+r)^t}}$$

$$V^*_t = \alpha_t S^*_t + b_t (1+r)^{-T} \Rightarrow V^*_{t+1} = \alpha_{t+1} S^*_{t+1} + b_{t+1} (1+r)^{-T}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[V^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = \alpha_{t+1} \mathbb{E}_Q\left[S^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] + b_{t+1} (1+r)^{-T} =$$

$$= \alpha_{t+1} S^*_t + b_{t+1} (1+r)^{-T} \overset{\text{αυτοχρηματοδ.}}{=} \alpha_t S^*_t + b_t (1+r)^{-T} = V^*_t$$

$V^*_t = \mathbb{E}_Q\left[V^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right]$. εάν $\exists\, t$ τ.ω. $V^*_t = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[V^*_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = 0$

$\Rightarrow Q\left[V^*_{t+1} > 0\right] = 0$

Θεώρημα (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα τιμολόγησης παραγώγων)

Σε μια χρηματοοικονομική αγορά δεν υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας (arbitrage opportunities) ανν υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale για την S_t^*.

$V_0 = V_0^* = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_1^* | \mathcal{F}_t]$ Εαν $V_0 = 0 \Rightarrow V_T = 0$

Εστω

$(\mathbb{Q} \sim \mathbb{P})$, $\mathbb{Q}$-martingale S_t^*

δεν υπάρχει t τ.ω $\mathbb{P}[\{V_t^* > 0\}] > 0$

$\mathbb{Q}[\{V_t^* > 0\}] = 0$

Πλήρης χρηματοοικονομική αγορά (Complete financial market)

Μια χρηματοοικονομική αγορά θα καλείται πλήρης εάν κάθε χρηματοοικονομικό παράγωγο είναι εφικτό (attainable).

Θεώρημα

Μια χρηματοοικονομική αγορά είναι πλήρης ανν υπάρχει μοναδικό μέτρο martingale $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{T} = \{0,1\},\ S_0 = 1,\ S_1 = \begin{cases} u > 1, & \text{με πιθανότητα } p, \\ d < 1, & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases},\ \text{επιτόκιο } r$$

$$\mathbb{E}_Q[S_1^* \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_Q[S_1^* \mid S_0 = 1] = S_0^* = S_0 = 1$$

$$\frac{1}{1+r} u q_1 + \frac{1}{1+r} d q_2 = 1 \Rightarrow \boxed{u q_1 + d q_2 = 1+r}$$

$$\boxed{q_1 + q_2 = 1} \qquad \begin{bmatrix} u & d \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{T} = \{0,1\},\ S_0 = 1,\ S_1 = \begin{cases} u > 1, & \text{με πιθανότητα } p_1, \\ 1, & \text{με πιθανότητα } p_2, \\ d < 1, & \text{με πιθανότητα } p_3 \end{cases},\ \text{επιτόκιο } r$$

$$u q_1 + q_2 + d q_3 = 1 + r$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & 1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r \\ 1 \end{bmatrix}$$

q_3 ελευθερη

- $V_T = C_T$
- Η τιμή του παραγώγου στο χρόνο $\overset{=0}{t}$ δίνεται ως

$$C_0 = V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T^* | \overset{S_0}{\overset{\|}{\mathcal{F}_0}}\right]$$

- $\mathbb{Q}$ ισοδύναμο μέτρο martingale.