ΜΕΜ-Θ602: Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (https://kesmarag.gitlab.io)

10η διάλεξη - 21.11.2022

Έχοντας αρκετά απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία, θα επιστρέψουμε στην ανάλυση των χρηματοοικονομικών παραγώγων.

Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European call option) για μια περίοδο $\mathbb{T} = \{0, T = 1\}$

- Στην αγορά μας υποθέτουμε οτι υπάρχουν 2 προϊόντα (assets), ένα χωρίς ρίσκο με αξία S_t^0 και ένα με ρίσκο με αξία S_t.

$u>1 \quad d<1$

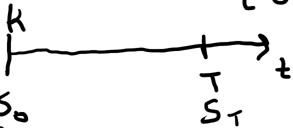
$$S_1 = \begin{cases} uS_0, & \text{με πιθανότητα } p \\ dS_0, & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

- Ορίζουμε το ομόλογο (bond) με τιμή όψεως 1 ως $B_t = B(t;1) = S_t^0 / S_1^0$
- Το δικαίωμα αγοράς ορίζεται με βάση το προϊόν με ρίσκο και έχει ανταμοιβή που δίνεται ως:

$$C_1 = \text{Payoff}(S_1) = (S_1 - K)_+$$

S_t payoff$(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

K - strike price.



$$S_t^0 = \begin{cases} S_0^0 (1+r)^t & \text{διακρ.} \\ S_0^0 e^{rt} & \text{συνεχ.} \end{cases}$$

Ομόλογο $B_t = B(t;T) = \dfrac{S_t^0}{S_T^0} = \begin{cases} (1+r)^{t-T} & \text{διακριτό} \\ e^{r(t-T)} & \text{συνεχής} \end{cases}$

$$(1+r)^{-T} \xrightarrow{T} 1$$

Portfolio. $\alpha S_t + b B_t$

$2S_t - B_t$ ← παράδειγμα 1

$2.5 S_t + 1.5 B_t$ ← Παράδειγμα 2.

Αγοράζουμε ποσότητα a από το προϊόν με ρίσκο και ποσότητα b από το ομόλογο με τιμή όψεως μονάδα, έτσι ώστε να μιμηθούμε την ανταμοιβή του δικαιώματος.

$t=0$ $\qquad T=1$

$$\begin{array}{ccl} & \nearrow & uS_0\ ,\ p \\ S_0 & & \\ & \searrow & dS_0\ ,\ 1-p \end{array}$$

$$\boxed{aS_1 + bB_1 = C_1}$$

$$\begin{array}{ccl} & \nearrow & (uS_0-K)_+ = C_u\ ,\ p \\ C_0 & & \\ & \searrow & (dS_0-K)_+ = C_d\ ,\ 1-p \end{array}$$

$\alpha S_t + bB_t$

$t=0$ $\quad \alpha S_0 + bB_0$ $\quad$ αρχική αξία

$t=1$ $\quad \boxed{\alpha S_1 + bB_1}$ $\quad$ Τελική αξία

I Αύξηση της αξίας

$\alpha u S_0 + b = C_u$

II Μείωση της αξίας

$\alpha d S_0 + b = C_d$

$$\begin{bmatrix} uS_0 & 1 \\ dS_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_u \\ C_d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{(u-d)S_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -dS_0 & uS_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_u \\ C_d \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0} \quad , \quad b = \frac{uC_d - dC_u}{u-d}$$

Τιμη του option στο χρόνο $t=0$ πρέπει να

είναι $C_0 = \alpha S_0 + bB_0 = \dfrac{C_u - C_d}{u-d} + \dfrac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}$

$$C_0 \xrightarrow{T=1} \boxed{(1+r)C_0} = \mathbb{E}[C_1]$$

αναμενόμενη.

Τελική αξία ισοδύναμου χαρτοφ. είναι

$$\mathbb{E}[C_1] = \alpha\,\mathbb{E}[S_1] + b\overset{1}{\overset{\parallel}{B_1}} = \qquad \mathbb{E}[S_1] = puS_0 + (1-p)dS_0$$

$$= \alpha p u S_0 + \alpha(1-p)dS_0 + b$$

$$\Rightarrow (1+r)\cancel{\alpha}\cancel{S_0} + (1+r)\cancel{b(1+r)^{-1}} = \cancel{\alpha}pu\cancel{S_0} + \cancel{\alpha}(1-p)d\cancel{S_0}\ \cancel{+b}$$

$$\Rightarrow 1+r = pu + d - pd \Rightarrow \boxed{p = \frac{(1+r)-d}{u-d}}$$

Παράδειγμα: $S_0 = 1€$ $K = 1€$ $T = 1$ $r = 0.1$

$u = 1.2$, $d = 0.8$

S_t , B_t

$C_1 = (S_1 - K)_+$

$C_u = (1.2 - 1.0)_+ = 0.2\ €$

$C_d = (0.8 - 1.0)_+ = 0\ €$

$$\alpha = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

$$b = \frac{-0.8 \cdot 0.2}{0.4} = -0.4$$

$$C_t = 0.5\, S_t - 0.4\, B_t$$

(Αρχική

$C_0 = 0.5 S_0 - 0.4 \cdot (1.1)^{-1}$)

$$C_0 = 0.5\text{€} - \frac{0.4}{1.1}\text{€} = 0.5\text{€} - 0.366 = \underline{0.14\text{€}}$$

$$p = \frac{1.1-0.8}{1.2-0.8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Έστω ένα option με τιμή <u>0.16€</u>

Επιτηδειότητα

Επενδητική στρατηγική που οδηγεί σε κέρδος από το τίποτα χωρίς την ανάληψη ρίσκου.

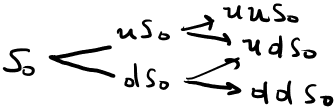
Μη επιτηδειότητα

Μη ύπαρξη στρατηγικής που οδηγει σε ευκαιρίες επιτηδειότητας.

Ερωτήματα

1. Έχοντας ένα μοντέλο για την εξέλιξη των αξιών, πως μπορούμε να πούμε να πούμε εάν υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας;
2. Εάν γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν τέτοιες ευκαιρίες επιτηδειότητας στην αγορά, πως τιμολογούμε ένα παράγωγο;
3. Μπορούμε να τιμολογήσουμε οπουδήποτε παράγωγο χωρίς να δημιουργηθούν ευκαιρίες επιτηδειότητας;

Μια πεπερασμένη χρηματοοικονομική αγορά (A finite financial market)



- $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$
- Στην αγορά μας υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 προϊόντα (assets), ένα χωρίς ρίσκο με αξία S_t^0 και ένα με ρίσκο με αξία S_t.
- Ορίζουμε το ομόλογο (bond) με τιμή όψεως 1 ως $B_t = B(t;T) = S_t^0 / S_T^0$

Financial market

Ονομάζουμε την συλλογή

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P}, S_t, B_t)$$

- $\mathcal{F}_t$ - πληροφορία διαθέσιμη αμέσως μετά τη παρατήρηση της τιμής S_t

Portfolio (χαρτοφυλάκιο)

Το πλήθος των προϊόντων (assets) που έχει στη κατοχή ένας επενδυτής.

- Θα θεωρήσουμε αυτοχρηματοδοτούμενο portfolio, δηλαδή πέρα από την αρχική επένδυση δεν υπάρχει είσοδος ή έξοδος χρήματος στο σύστημα.

Επενδυτική στρατηγική (investment strategy)

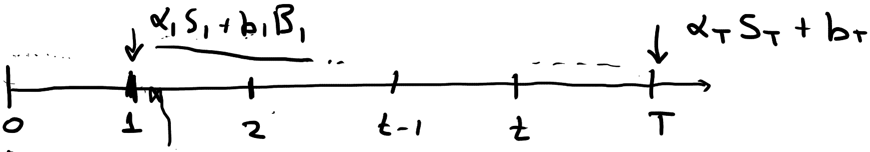
Επενδυτική στρατηγική για την χρηματοοικονομική αγορά ονομάζουμε το ζεύγος (a_t, b_t) που εκφράζει την ποσότητα του με προϊόντος ρίσκο και την ποσότητα του ομολόγου που υπάρχει στο portfolio του επενδυτή στο χρονικό παράθυρο $[t-1, t)$.

- Αρχική αξία : $V_0 = a_1 S_0 + b_1 B_0$
- Αξίες για κάθε διακριτό χρόνο : $V_t = a_t S_t + b_t B_t, \; t = 1, \ldots, T$
- Αυτοχρηματοδότηση : $a_t S_t + b_t B_t = a_{t+1} S_t + b_{t+1} B_t$

$(\alpha_{t+1} - \alpha_t) S_t + (b_{t+1} - b_t) B_t = 0$

$\Delta a_t S_t + \Delta b_t B_t = 0$

a_t, b_t είναι προσαρμοσμένες (adapted) στην $\mathcal{F}_{t-1}$



$\alpha_1 \to \alpha_2$

$b_1 \to b_2$

α_1 μετοχη.

b_1 ομολογα

$$\boxed{\alpha_2 S_1 + b_2 B_1 = \alpha_1 S_1 + b_1 B_1}$$

$\alpha_1 S_0 + b_1 B_0$

$T = 2$

$\alpha_1 = 1 \qquad S_0 = 1 \qquad B_0 = 1.1^{-T} \longrightarrow S_1 = 0.9 \qquad B_1 = 1.1^{1-T}$

$b_1 = -0.5$

$$\boxed{1 \cdot 0.9 - 0.5 \cdot 1.1^{-1} = \alpha_2 \cdot 0.9 + b_2 \cdot 1.1^{-1}}$$

Παραδεκτή στρατηγική (admissible strategy)

1. Αυτοχρηματοδοτούμενη
2. $V_t \geq 0, \forall t \in \mathbb{T}$

Εφικτό (attainable) χρηματοοικονομικό παράγωγο

Ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο με ανταμοιβή C_T (πχ European Call Option) ονομάζεται εφικτό (attainable) εάν υπάρχει παραδεκτή στρατηγική που αναπαράγει το C_T, δηλαδή $V_T = C_T$.

Ευκαιρία επιτηδειότητας (arbitrage opportunity)

1. Παραδεκτή στρατηγική
2. $V_0 = 0$
3. $\mathbb{E}[V_T] > 0$

Τιμές με έκπτωση (discounted prices)

Έχοντας τη στοχαστική διαδικασία S_t επιθυμούμε να εκφράζουμε την τιμή σε κάθε χρονική στιγμή ως προς τη σημερινή αξία του χρήματος.

$$S_t^* = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+r)^t} S_t, & \text{(διακριτός χρόνος)} \\ e^{-rt} S_t, & \text{(συνεχής χρόνος)} \end{cases}$$