ΜΕΜ-205 Περιγραφική Στατιστική

Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κώστας Σμαραγδάκης (kesmarag@pm.me)

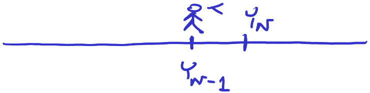
26-04-2023

- Θέλουμε να προβλέψουμε μελοντικές τιμές μιας χρονολογικής σειράς

$$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} \longrightarrow Y_{N+1} = ;$$

- Θα μελετήσουμε τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών Y_t

$$\hat{Y}_{N+1} = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$$



Σφάλμα $\quad e_{N+1} = \hat{Y}_{N+1} - Y_{N+1}$

$$Y_{N+1} = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) + \varepsilon_{N+1}$$

- Αρχικά θεωρούμε το πιθανοθεωρητικό μοντέλο

$$Y_t = A + BY_{t-1} + \epsilon_t$$

$$f(Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} \longrightarrow \{(Y_1, Y_2)\ (Y_2, Y_3), \ldots, (Y_{N-1}, Y_N)\}$

Εφαρμόζουμε απλή γραμμική παλινδρόμηση

$\hat{y}_t = a + by_{t-1}$ $\qquad y_t = \alpha + by_{t-1} + e_t$ $\qquad \hat{y}_n = a + bx_n$

Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (Pearson)

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$$

$$ACF(1) = r = \frac{SS_{\overset{y}{Y_t}, \overset{x}{Y_{t-1}}}}{\sqrt{SS_{Y_t,Y_t}SS_{Y_{t-1},Y_{t-1}}}} \in [-1, 1]$$

$$\{Y_1; Y_2, \ldots, Y_N\} \longrightarrow \overbrace{\{(Y_1, Y_{k+1}), \ldots, (Y_{N-k}, Y_N)\}}^{N-K}$$

- Ανάλογα για k μη αρνητικό ακέραιο θεωρούμε το μοντέλο

$$Y_t = A + BY_{t-k} + \epsilon_t, \quad k \geq 0$$

Συνάρτηση Αυτόσυσχέτισης (Auto-Correlation Function)

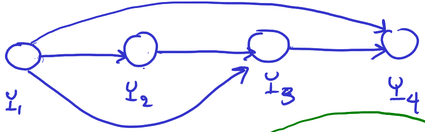
$$\text{ACF}(k) = \frac{SS_{Y_t, Y_{t-k}}}{\sqrt{SS_{Y_t, Y_t} SS_{Y_{t-k}, Y_{t-k}}}}, \quad k \geq 0$$

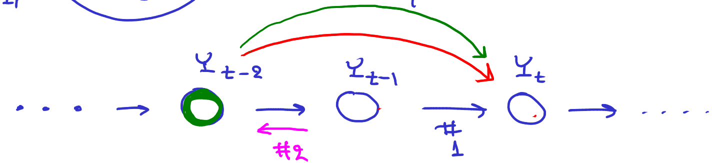
$$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} \longrightarrow \{(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, Y_{k+1}), (Y_2, Y_3, \dots, Y_{k+1}, Y_{k+2}), (Y_{N-k-1}, Y_{N-k}, \dots, Y_{N-1}, Y_N)\}$$

Αυτοπαλινδρομικό μοντέλο k τάξης (Auto-Regressive model of order k)

$$\mathrm{AR(k)} \quad : \quad \mathrm{Y_t} = \mathrm{A} + \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{k}} \mathrm{B^{(j)} Y_{t-j}} + \epsilon_{\mathrm{t}}, \quad \mathrm{k} \geq 0$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_k \\ 1 & Y_2 & Y_3 & \cdots & Y_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & Y_{N-k-1} & Y_{N-k} & \cdots & Y_{N-1} \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} Y_{k+1} \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A \\ B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(k)} \end{bmatrix} = \underbrace{(X^T X)^{-1}}_{(k+1)\times(k+1)} \overset{(k+1)}{X^T} y$$





ACF(2)

ACF(1) ← πληροφορία από τον Y_{t-1} και από τους προηγούμενους

↓

PACF(1) ← πληροφορία από το Y_{t-1}

#1:

$Y_{t-1} \to Y_t$ $\{(Y_1, Y_2), \dots, (Y_{N-1}, Y_N)\}$ $\hat{y}_t = \alpha_1 + b_1 y_{t-1}$

#2

$Y_{t-1} \to Y_{t-2}$ $\{(Y_2, Y_1), \dots, (Y_N, Y_{N-1})\}$ $\hat{y}_{t-2} = \alpha_2 + b_2 y_{t-1}$

$(e_1)_t = \hat{y}_t - y_t$ τι πληρ. περισ. για τον υπολογισμό του y_t από το y_{t-1}

$(e_2)_{t-2} = \hat{y}_{t-2} - y_t$ y_{t-2} από το y_{t-1}

#3

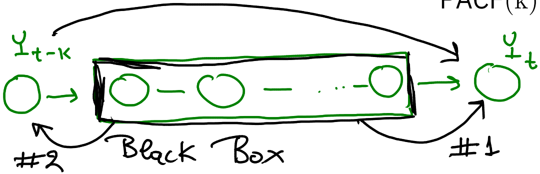
$(e_1)_t = a_3 + b_3 (e_2)_{t-2} + (e_3)_t$ ή $\widehat{(e_1)}_t = \alpha_3 + b_3 (e_2)_{t-2}$

$$r = \frac{SS_{e_1 e_2}}{\sqrt{SS_{e_1 e_1} SS_{e_2 e_2}}} = PACF(2)$$

Συνάρτηση Μερικής Αυτόσυσχέτισης (Partial Auto-Correlation Function)

- Ποσοτικοποιεί την άμεση γραμμική επίδραση του $\mathrm{Y_{t-k}}$ στο $\mathrm{Y_t}$

$$\mathrm{PACF}(\mathrm{k}) = \ldots$$



#1 $\square \rightarrow Y_t \rightarrow (e_1)_t$

#2 $\square \rightarrow Y_{t-k} \rightarrow (e_2)_{t-k}$

#3 $r = \dfrac{SS_{e_1 e_2}}{\sqrt{SS_{e_1} \, SS_{e_2}}} = PACF(k)$

$$\{(Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1}, Y_k), \dots, (Y_{N-k+1}, \dots, Y_N)\}$$

$$y_t = \alpha_1 + b_1^{(1)} y_{t-k+1} + \dots + b_1^{(k-1)} y_{t-1} + (e_1)_t$$

$$\{(Y_2, Y_3, \dots, Y_k, Y_1), \dots, (Y_{N-k+1}, \dots, Y_{N-k})\}$$

$$y_{t-k} = \alpha_2 + b_2^{(1)} y_{t-k+1} + \dots + b_2^{(k-1)} y_{t-1} + (e_2)_{t-k}$$